МАЗКО Олексій Григорович

доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту математики Національної академії наук України. Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки (2008) та премії НАН України ім. М. В. Остроградського (2018). Автор понад 150 наукових публікацій і 4 монографій. Заступник головного редактора міжнародного журналу «Nonlinear Dynamics and Systems Theory» (www.e-ndst.kiev.ua).

Наукові інтереси: теорія стійкості динамічних систем, теорія керування, матричний аналіз, математичні проблеми механіки.

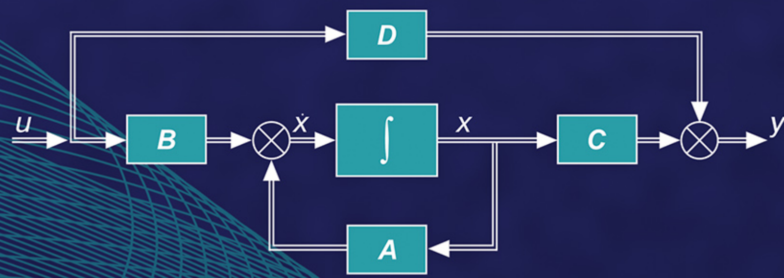
E-mail: mazkoag@gmail.com

НАУКОВА ДУМКА

проект Наукова книга

О.Г. МАЗКО

МАТРИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О. Г. МАЗКО

МАТРИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

ПРОЄКТ

«НАУКОВА КНИГА»

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2023

https://doi.org/10.37863/6103136622-55
УДК 517.93; 519.71

У праці викладено конструктивні методи аналізу та синтезу динамічних систем, що ґрунтуються на застосуванні матричних рівнянь та нерівностей. Подано узагальнення рівняння Ляпунова в теорії стійкості та локалізації спектра лінійних систем. Викладено класичні методи аналізу стійкості руху, сучасні методи робастної стабілізації та оптимізації динамічних систем, а також нові підходи до розв'язування задач узагальненого H_∞-керування для неперервних і дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами. Запропоновано алгоритми оцінювання та мінімізації зваженого рівня гасіння обмежених збурень у стандартних та дескрипторних системах керування. Розвинуто теорію стійкості позитивних та монотонних динамічних систем.

Для наукових та інженерно-технічних співробітників, аспірантів та студентів старших курсів вузів відповідних спеціальностей.

Р е ц е н з е н т и:
академік НАН України *А. А. Мартинюк*,
член-кореспондент НАН України *О. А. Бойчук*

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту математики НАН України (протокол № 12 від 13.12.2022 р.)

Видання здійснено за кошти Цільової комплексної програми НАН України «Наукові основи функціонування та забезпечення умов розвитку науково-видавничого комплексу»

Науково-видавничий відділ природничо-технічної літератури
Редактор *О. А. Микитенко*

ISBN 978-966-00-1892-1

Зміст

Передмова

Праця присвячена сучасним методам аналізу та синтезу динамічних систем, що ґрунтуються на застосуванні матричних рівнянь, лінійних та квадратичних матричних нерівностей, а також методики порівняння за конусом у напівупорядкованому просторі. Матричні рівняння Ляпунова

$$A^{\top}X + XA = -Y, \quad A^{\top}XA - X = -Y$$

виражають класичні методи дослідження неперервних та дискретних систем, які успішно застосовуються як у задачах аналізу стійкості руху, так і при проєктуванні керованих об'єктів із заданою якістю. Для практичної реалізації матричних методів дослідження складних об'єктів створено високопродуктивні комп'ютерні засоби такі, як MATLAB, Maple, Mathcad Prime тощо.

У розділі 1 викладено теорію лінійних матричних рівнянь та нерівностей загального вигляду. Наводяться властивості розв'язків, умови сумісності та методи трансформацій матричних рівнянь. Особлива увага приділяється побудові симетризованих аналогів рівняння Ляпунова для лінійних динамічних систем та розробці методів локалізації власних чисел матриць, матричних поліномів та функцій (узагальнені теореми Ляпунова, Островського–Шнайдера та ін.). Зокрема, на базі розв'язків блокової спектральної задачі наводяться аналоги рівняння Ляпунова для дескрипторних систем, а також диференціальних та різницевих систем довільного порядку. Сформульовані теореми про стійкість для деяких класів диференціальних, різницевих, диференціально-різницевих та стохастичних систем ґрунтуються на методах узагальненого рівняння Ляпунова. Вивчаються лінійні матричні нерівності (ЛМН) з невизначеними коефіцієнтами (політопами) та можливості їх застосування в задачах робастної локалізації спектра. Низка фактів, викладених у цьому розділі, застосовується в наступних розділах під час розроблення методів аналізу та синтезу динамічних систем.

У розділі 2 наводяться основні означення та загальні теореми про стійкість руху лінійних та нелінійних систем. У термінах ЛМН формулюються критерії та достатні умови стійкості лінійних диференціальних систем другого порядку, умови абсолютної стійкості лінійних систем із запізненням, а також умови стійкості в середньоквадратичному стохастичних систем типу Іто. Пропонується новий підхід до вирішення проблеми стійкості лінійних систем у термінах спеціальних функцій сліду.

У розділі 3 розглядається клас лінійних систем керування зі зворотним зв'язком за вимірюваним виходом, що формується у вигляді лінійних комбінацій фазових змінних та керування. Формулюються критерії існування стабілізовних статичних та динамічних регуляторів. Викладається методика субоптимальної стабілізації з урахуванням розміщення спектра системи в заданій області, що базується на застосуванні узагальненого рівняння Ляпунова. Пропонуються методи робастної стабілізації та квадратичної оптимізації лінійних систем з невизначеними матрицями коефіцієнтів у рівняннях руху, вимірюваного виходу та регулятора. Наводяться умови стабілізації класу дескрипторних (диференціально-алгебричних) систем керування за допомогою статичних та динамічних регуляторів.

У розділі 4 основні результати попереднього розділу поширюються на клас нелінійних нестаціонарних систем керування, поданих у векторно-матричній псевдолінійній формі. При цьому ключову роль відіграють методи квадратичних функцій Ляпунова та так звані леми про матричну невизначеність, зокрема лема Пітерсена та її аналоги. Практичне застосування викладених методів синтезу статичних та динамічних регуляторів за певних обмежень зводяться до розв'язування ЛМН.

У розділі 5 наводяться елементи сучасної теорії H_∞-керування та її узагальнень. Цей напрям досліджень інтенсивно розвивається протягом останніх 40 років і широко застосовується при проєктуванні систем керування для реальних об'єктів. Рівняння руху керованих об'єктів містять невизначеності, пов'язані з наявністю зовнішніх (екзогенних) збурень, а також початкових збурень, зумовлених невизначеним початковим вектором. Використані критерії якості системи характеризують зважений рівень впливу на її якість як зовнішніх, так і початкових збурень. Для таких критеріїв якості наводяться оцінки та методи зваженої H_∞-оптимізації з використанням статичних та динамічних регуляторів, що базуються на розв'язуванні ЛМН. Наводяться результати дослідження аналогічних задач для класу лінійних дескрипторних систем керування, а також вивчаються можливості застосування розроблених матричних методів узагальненого H_∞-керування для деяких класів нелінійних систем.

У розділі 6 розглядаються системи керування з дискретним часом. Наводяться умови стабілізації лінійних дискретних систем, методи робастної стабілізації та оцінки квадратичних критеріїв якості нелінійних дискретних систем із поліедральною невизначеністю коефіцієнтів, а також елементи узагальненої теорії H_∞-керування для дискретних систем.

Розділ 7 присвячений вивченню динамічних систем у напівупорядкованому банаховому просторі. Визначаються класи позитивних та монотонних систем щодо заданих конусів. У термінах додатних та додатно оборотних операторів формулюються критерії експоненціальної стійкості лінійних позитивних систем. Пропонуються методи аналізу стійкості станів нелінійних монотонних систем, узагальнені методи порівняння систем, а також умови робастної стійкості станів лінійних та нелінійних систем з інтервальною невизначеністю, що описується в термінах конусних нерівностей. Формулюється загальна задача позитивної стабілізації систем керування та способи її розв'язування для деяких типів конусів у скінченновимірному просторі. Отримані результати дають змогу розглядати раніше вивчені матричні задачі аналізу та синтезу, зокрема проблему робастної стійкості із загальних позицій теорії операторів у напівупорядкованому просторі.

У додатку наведено низку відомих означень та допоміжних фактів, що використовуються під час викладення основних тверджень.

Основним матеріалом книги є результати автора, опубліковані у періодичних виданнях та монографіях [49,60,131], а також низка відомих результатів за тематикою праці. У розділі "Коментарі та бібліографічні вказівки" надаються необхідні посилання на використану літературу з короткими коментарями. Наведений список літератури не претендує на повноту.

Сподіваюся, що книга виявиться корисною багатьом дослідникам, які цікавляться теорією стійкості та стабілізації руху, а також інженерам, аспірантам та студентам вищих технічних навчальних закладів.

Автор вдячний колегам з Інституту математики НАН України за корисне обговорення та технічну допомогу під час підготовки рукопису.

О. Г. Мазко

Позначення

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) — дійсний (комплексний) n-вимірний простір;

$\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) — простір дійсних (комплексних) матриць розміру $n \times m$;

$A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^{n,m}$ — матриця розміру $n \times m$ з елементами a_{ij};

a_{i*} (a_{*j}) — i-й рядок (j-й стовпець) матриці A;

0 — нульові скаляр, вектор або матриця;

$I\,(I_n)$ — одинична матриця (порядку n);

$0_{n\times m}$ — нульова матриця розміру $n \times m$;

$x = \mathrm{Re}\lambda$, $y = \mathrm{Im}\lambda$ — дійсна та уявна частини комплексного числа $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$;

$\mathbb{C}^-$ ($\mathbb{C}^+$) — відкрита півплощина $\mathrm{Re}\lambda < 0$ ($\mathrm{Re}\lambda > 0$);

$\overline{\mathbb{C}}^-$ ($\overline{\mathbb{C}}^+$) — замкнена півплощина $\mathrm{Re}\lambda \le 0$ ($\mathrm{Re}\lambda \ge 0$);

$\overline{\lambda} = x - iy$ — комплексно-спряжене число, $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$;

$\|x\|$ — евклідова норма вектора x;

(a, b) — скалярний добуток векторів a і b;

$\|x\|_Q = \int\limits_0^\infty x^\top Qx\,dt$ — зважена L_2-норма вектор-функції $x(t)$;

$\|x\|_Q = \sum\limits_{t=0}^\infty x_t^\top Qx_t$ — зважена l_2-норма векторної послідовності x_t, $t = 0, 1, \dots$;

$A^\top$, A^*, A^{-1}, A^- і A^+ — відповідно транспонована, спряжена, обернена, напівобернена та псевдообернена матриці;

$\det A$, $\mathrm{rank}\,A$, $\ker A$, $\mathrm{tr}\,A$, $\sigma(A)$, $\rho(A)$ і $\|A\|$ — відповідно детермінант, ранг, ядро, слід, спектр, спектральний радіус і норма матриці A;

$f(A)$ — аналітична функція від матриці A;

$\oint\limits_\omega$ — інтеграл типу Коші по замкненому контуру ω;

$\Lambda_f^{\pm}$ — відкриті області, обмежені кривою $f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$;

$\mathrm{i}_f^+(A)$, $\mathrm{i}_f^-(A)$, $\mathrm{i}_f^0(A)$ — кількості точок спектра $\sigma(A)$, що належать відповідним множинам Λ_f^+, Λ_f^-, Λ_f^0;

$A \otimes B$ — кронекеровий добуток матриць A і B;

$A \odot B$ — добуток Шура матриць A і B;

$A^{\perp}$ — ортогональне доповнення матриці повного рангу A;

W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$;

$\mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ — опуклий багатогранник (політоп) з вершинами $A_1, \ldots, A_\nu$;

$\mathcal{H}_n$ ($\mathcal{K}_n$) — множина ермітових (невід'ємно визначених) матриць порядку n;

$\lambda_{\max}(X)$ ($\lambda_{\min}(X)$) — максимальне (мінімальне) власне значення ермітової матриці $X = X^*$;

$\mathrm{i}(X) = \big\{\mathrm{i}_+(X), \mathrm{i}_-(X), \mathrm{i}_0(X)\big\}$ — інерція ермітової матриці X, що складається з кількостей її додатних, від'ємних та нульових власних значень із урахуванням кратностей;

$\operatorname{sign} X = \mathrm{i}_+(X) - \mathrm{i}_-(X)$ — сигнатура ермітової матриці X;

$\mathbf{L}X$, $\mathbf{L}_f X$, ... — лінійні оператори (перетворення X);

$\mathbf{I}$ — тотожний оператор;

$\mathbf{L} \trianglerighteq 0$ — додатний оператор;

$\rho(\mathbf{L})$ — спектральний радіус оператора $\mathbf{L}$;

$\ker \mathbf{L}$ — ядро оператора $\mathbf{L}$;

$\mathcal{K}_0$ — множина внутрішніх точок конуса $\mathcal{K}$ у просторі $\mathcal{E}$;

$X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$, $X \overset{\mathcal{K}}{<} Y$ — нерівності, що породжуються конусом $\mathcal{K}$;

$\mathbf{L}_1 \trianglelefteq \mathbf{L}_2$ — операторна нерівність, рівносильна додатності оператора $\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$.

Розділ 1

Матричні рівняння та нерівності

Цей розділ присвячено теорії лінійних матричних рівнянь та нерівностей і її застосуванню у задачах локалізації власних значень матриць, матричних поліномів та функцій. Низка фактів, викладених у цьому розділі, застосовується в наступних розділах під час розроблення методів аналізу та синтезу динамічних систем.

1.1 Лінійні матричні рівняння загального вигляду

Ранг та інерція розв'язків. Розглянемо лінійне матричне рівняння загального вигляду

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} c_{ij} A_i X B_j = Y, \tag{1.1}$$

де $A_i \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $B_j \in \mathbb{C}^{m\times q}$ і $Y \in \mathbb{C}^{p\times q}$ — задані матриці, c_{ij} — скалярні коефіцієнти, що складають матрицю $C \in \mathbb{C}^{k\times s}$, а $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ — шуканий розв'язок. Перепишемо рівняння (1.1) у вигляді системи співвідношень

$$AZB = Y, \quad C \otimes X = Z, \tag{1.2}$$

де символ $\otimes$ означає *кронекеровий добуток*, а блокові матриці

$$A = \begin{bmatrix} A_1, \dots, A_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} c_{11}X & \dots & c_{1s}X \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{k1}X & \dots & c_{ks}X \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.1 *Якщо рівняння* (1.1) *має розв'язок* X, *то*

$$\operatorname{rank} C \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Y + \operatorname{rank} W, \tag{1.3}$$

де $W = Z - ZBY^{-}AZ$, Y^{-} *— напівобернена матриця, що визначається рівнянням* $YY^{-}Y = Y$. *За умов спряженості*

$$B = A^{*}, \quad C = C^{*}, \quad X = X^{*}, \quad Y = Y^{*}, \quad Y^{-} = Y^{-*} \tag{1.4}$$

разом з (1.3) *виконується рівність*

$$\operatorname{sign} C \operatorname{sign} X = \operatorname{sign} Y + \operatorname{sign} W. \tag{1.5}$$

Зазначимо, що рівності (1.3) і (1.5) можна записати в термінах індексів інерції:

$$\mathrm{i}_{\pm}(C)\,\mathrm{i}_{+}(X) + \mathrm{i}_{\mp}(C)\,\mathrm{i}_{-}(X) = \mathrm{i}_{\pm}(Y) + \mathrm{i}_{\pm}(W). \tag{1.6}$$

Наведемо низку наслідків теореми 1.1.

Для будь-якого розв'язку X рівняння (1.1) виконуються нерівності

$$\operatorname{rank} Y \le \operatorname{rank} C \operatorname{rank} X \le \operatorname{rank} Y + \delta,$$

де $\delta = \min\{kn + sm - \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B, \operatorname{rank}(C^{-} \otimes X^{-} - BY^{-}A)\}$. Якщо $\delta = 0$, зокрема $C^{-} \otimes X^{-} = BY^{-}A$, то X має мінімальний ранг, що дорівнює $\operatorname{rank} Y / \operatorname{rank} C$. Рівність (1.3) в окремих випадках подає формули для обчислення рангу блокових матриць:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1, X_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} X_1 + \operatorname{rank} L, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} X_1 + \operatorname{rank} R, \tag{1.8}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} X_1 + \operatorname{rank} L + \operatorname{rank} R + \operatorname{rank} G, \tag{1.9}$$

де $\quad X_1 \in \mathbb{C}^{p\times q}, \quad X_2 \in \mathbb{C}^{p\times \tau}, \quad X_3 \in \mathbb{C}^{t\times q}, \quad X_4 \in \mathbb{C}^{t\times \tau}$,

$$L = X_2 - X_1X_1^{-}X_2, \quad R = X_3 - X_3X_1^{-}X_1,$$

$$G = (I_t - RR^{-})T(I_\tau - L^{-}L), \quad T = X_4 - X_3X_1^{-}X_2.$$

За умов (1.4) для будь-якої ермітової матриці-розв'язку X рівняння (1.1) виконуються нерівності

$$\mathrm{i}_{\pm}(Y) \le \mathrm{i}_{\pm}(C)\mathrm{i}_{+}(X) + \mathrm{i}_{\mp}(C)\mathrm{i}_{-}(X) \le \mathrm{i}_{\pm}(Y) + \mathrm{i}_{\pm}(C^{-} \otimes X^{-} - A^{*}Y^{-}A).$$

Якщо при цьому $\operatorname{sign} C = 0$, то

$$\operatorname{rank} C \operatorname{rank} X \geq \operatorname{rank} Y + |\operatorname{sign} Y| = 2 \max\{\mathrm{i}_+(Y), \mathrm{i}_-(Y)\}.$$

Зокрема, якщо $Y > 0$ або $Y < 0$, то за умов $\operatorname{rank} C = 2$ і $\operatorname{sign} C = 0$ розв'язок X є невиродженою матрицею.

Нехай $C = 1$ за умов (1.4), тоді $W = X - XA^*Y^-AX$ і згідно з (1.6) виконуються нерівності

$$\mathrm{i}_+(X) \geq \mathrm{i}_+(Y), \quad \mathrm{i}_-(X) \geq \mathrm{i}_-(Y), \tag{1.10}$$

причому рівності в (1.10) досягаються тоді і лише тоді, коли $W = 0$ (*узагальнений закон інерції*). У *законі інерції Сільвестра* матриця конгруентного перетворення A є квадратною і невиродженою. У загальному випадку рівності $\mathrm{i}_+(X) = \mathrm{i}_+(Y) + r$, $\mathrm{i}_-(X) = \mathrm{i}_-(Y)$ виконуються тоді і лише тоді, коли $W \geq 0$ і $\operatorname{rank} W = r$. Аналогічно, рівності $\mathrm{i}_+(X) = \mathrm{i}_+(Y)$, $\mathrm{i}_-(X) = \mathrm{i}_-(Y) + r$ еквівалентні співвідношенням $W \leq 0$ і $\operatorname{rank} W = r$. Ці твердження можна використати при обчисленні інерції ермітової матриці без обмежень на її мінори, подібних умовам теореми Якобі [21]. Знаходження інерції матриці X зводиться до застосування критеріїв знаковизначеності Y та W. Так, якщо $p \times n$-матриця A обрана так, що $Y > 0$ і $W \leq 0$, то $\mathrm{i}_+(X) = p$, $\mathrm{i}_-(X) = \operatorname{rank} W$. Аналогічно, за умов $Y < 0$, $W \geq 0$ маємо $\mathrm{i}_+(X) = \operatorname{rank} W$, $\mathrm{i}_-(X) = p$. Якщо $p = 1$ і $AXA^* = \alpha > 0$, то співвідношення $\mathrm{i}_+(X) = 1$ і $\alpha X \leq XA^*AX$ еквівалентні.

Якщо ермітова матриця X подана у блоковому вигляді:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \quad X_1 = X_1^*, \quad X_2 = X_3^*, \quad X_4 = X_4^*,$$

то разом з (1.9) виконується рівність

$$\operatorname{sign} X = \operatorname{sign} X_1 + \operatorname{sign} G. \tag{1.11}$$

Рівності (1.9) та (1.11) еквівалентні співвідношенням

$$i_\pm(X) = i_\pm(X_1) + i_\pm(G) + \operatorname{rank} L, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{i}_0(X) = \mathrm{i}_0(X_1) + \mathrm{i}_0(G) - 2 \operatorname{rank} L. \tag{1.13}$$

Зокрема, маємо такі критерії:

$$\mathrm{i}_+(X) = \mathrm{i}_+(X_1) \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 = X_1 X_1^- X_2, \quad X_4 \leq X_3 X_1^- X_2;$$

$$\mathrm{i}_-(X) = \mathrm{i}_-(X_1) \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 = X_1 X_1^- X_2, \quad X_4 \geq X_3 X_1^- X_2;$$

$$X \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 \geq 0, \quad X_4 \geq X_3 X_1^- X_2, \quad X_2 = X_1 X_1^- X_2.$$

У разі невиродженого блоку X_1 справедливі твердження *леми Шура* (див. лему 8.2).

Трансформації та умови розв'язності. Під час дослідження матричних рівнянь важливу роль відіграють системи перетворень (*трансформацій*), які приводять їх до простішого вигляду. Зокрема, нас цікавлять можливості приведення (1.1) до рівняння з трикутними матричними коефіцієнтами, умови розв'язності якого добре вивчені.

Розглянемо два рівняння типу (1.1):

$$\mathbf{M}X \triangleq A(C \otimes X)B = Y, \tag{1.14}$$

$$\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} \triangleq L(D \otimes \widehat{X})R = \widehat{Y}, \tag{1.15}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} A_1, \ldots, A_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1s} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{k1} & \ldots & c_{ks} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1, \ldots, L_{\widehat{k}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{\widehat{s}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1\widehat{s}} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ d_{\widehat{k}1} & \ldots & d_{\widehat{k}\widehat{s}} \end{bmatrix}.$$

Визначимо систему матричних перетворень:

$$\begin{gathered} P_1 A P^{(2)} = P_3 L P^{(4)}, \quad Q^{(1)} B Q_2 = Q^{(3)} R Q_4, \\ C = S_1 G S_2, \quad D = S_3 G S_4, \quad P_1 Y Q_2 = P_3 \widehat{Y} Q_4, \end{gathered} \tag{1.16}$$

а також структуру розв'язків рівнянь (1.14) і (1.15):

$$\mathbf{X}(H) = P_2 H Q_1, \quad \widehat{\mathbf{X}}(H) = P_4 H Q_3, \tag{1.17}$$

де $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, $Q^{(1)} = S_2 \otimes Q_1$, $Q^{(3)} = S_4 \otimes Q_3$, P_t, Q_t, S_t $(t = \overline{1,4})$, G і H — деякі матриці відповідних розмірів. При цьому використаємо такі рангові обмеження:

$$\operatorname{rank} P_1 = p, \quad \operatorname{rank} Q_2 = q, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{rank} P_2 = n, \quad \operatorname{rank} Q_1 = m, \tag{1.19}$$

$$\operatorname{rank} P_3 = \widehat{p}, \quad \operatorname{rank} Q_4 = \widehat{q}, \tag{1.20}$$

$$\operatorname{rank} P_4 = \widehat{n}, \quad \operatorname{rank} Q_3 = \widehat{m}, \tag{1.21}$$

$$\operatorname{rank} S_1 = k, \quad \operatorname{rank} S_2 = s, \tag{1.22}$$

$$\operatorname{rank} S_3 = \widehat{k}, \quad \operatorname{rank} S_4 = \widehat{s}. \tag{1.23}$$

Теорема 1.2 *Нехай параметри рівнянь* (1.14) *і* (1.15) *пов'язані системою* (1.16). *Тоді, якщо виконуються умови* (1.18) *і рівняння* (1.15) *має розв'язок* $\widehat{X} = \widehat{\mathbf{X}}(H)$, *то* $X = \mathbf{X}(H)$ *є розв'язком рівняння* (1.14). *Якщо виконуються умови* (1.20) *і рівняння* (1.14) *має розв'язок* $X = \mathbf{X}(H)$, *то* $\widehat{X} = \widehat{\mathbf{X}}(H)$ *— розв'язок рівняння* (1.15).

Зв'язок між розв'язками вигляду (1.17) і правими частинами рівнянь (1.14) і (1.15) в системі перетворень (1.16) можна подати так:

$$X = P_2 P_4^- \widehat{X} Q_3^- Q_1 + X_0, \quad \widehat{X} = P_4 P_2^- X Q_1^- Q_3 + \widehat{X}_0,$$

$$Y = P_1^- P_3 \widehat{Y} Q_4 Q_2^- + Y_0, \quad \widehat{Y} = P_3^- P_1 Y Q_2 Q_4^- + \widehat{Y}_0,$$

де $X_0 = P_2 H_0 Q_1$, $\widehat{X}_0 = P_4 \widehat{H}_0 Q_3$, H_0, $\widehat{H}_0$, Y_0 і $\widehat{Y}_0$ — довільні матриці такі, що $P_4 H_0 Q_3 = 0$, $P_2 \widehat{H}_0 Q_1 = 0$, $P_1 Y_0 Q_2 = 0$ і $P_3 \widehat{Y}_0 Q_4 = 0$. Зокрема, при $H_0 = 0$ і $\widehat{H}_0 = 0$ маємо таке твердження.

Наслідок 1.1 *Для того щоб матриця X була розв'язком рівняння* (1.14), *за умов* (1.18) *і* (1.19) *достатньо, а за умов* (1.19) *і* (1.20) *необхідно, щоб матриця* $\widehat{X} = P_4 P_2^- X Q_1^- Q_3$ *задовольняла рівняння* (1.15). *Аналогічно, для того щоб рівняння* (1.14) *мало розв'язок* $X = P_2 P_4^- \widehat{X} Q_3^- Q_1$, *за умов* (1.18) *і* (1.21) *достатньо, а за умов* (1.20) *і* (1.21) *необхідно, щоб матриця* $\widehat{X}$ *задовольняла рівняння* (1.15).

Виділимо такі системи перетворень (1.16):

$$P_1AP^{(2)} = L,\ Q^{(1)}BQ_2 = R,\ C = S_1DS_2,\ P_1YQ_2 = \widehat{Y}; \quad (1.24)$$

$$AP^{(2)} = P_3L,\ Q^{(1)}B = RQ_4,\ C = S_1DS_2,\ Y = P_3\widehat{Y}Q_4; \quad (1.25)$$

$$P_1A = LP^{(4)},\ BQ_2 = Q^{(3)}R,\ S_3CS_4 = D,\ P_1YQ_2 = \widehat{Y}; \quad (1.26)$$

$$A = P_3LP^{(4)},\ B = Q^{(3)}RQ_4,\ S_3CS_4 = D,\ Y = P_3\widehat{Y}Q_4. \quad (1.27)$$

Якщо вдається побудувати систему (1.24) або (1.25), то розв'язок рівняння (1.14) можна визначити згідно з (1.17) у вигляді $X = \mathbf{X}(\widehat{X})$, де $\widehat{X}$ — розв'язок рівняння (1.15). Аналогічно, застосовуючи системи (1.26) і (1.27), маємо $\widehat{X} = \widehat{\mathbf{X}}(X)$.

Зазначимо, що кожне із обмежень (1.18)—(1.23) дає можливість спростити систему (1.16). Так, якщо виконуються рівності (1.20), (1.21) і (1.23), то на базі (1.16) можна побудувати нову систему перетворень вигляду (1.24) із використанням напівобернених матриць повного рангу.

Сформулюємо умови розв'язності рівнянь (1.14) і (1.15) за припущення, що всі матриці L_i і R_j в системі (1.16) мають квазітрикутну структуру:

$$L_i = \begin{bmatrix} L_{11}^{(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\alpha 1}^{(i)} & \dots & L_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad R_j = \begin{bmatrix} R_{11}^{(j)} & \dots & R_{1\beta}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R_{\beta\beta}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

де $L_{tt}^{(i)} \in \mathbb{C}^{l_{t1}\times l_{t2}}$, $R_{\tau\tau}^{(j)} \in \mathbb{C}^{r_{\tau 1}\times r_{\tau 2}}$, $t = \overline{1,\alpha}$, $\tau = \overline{1,\beta}$. При цьому оператор рівняння (1.15) подається у блоковому вигляді $\widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{K}+\mathbf{N}$, де

$$\mathbf{K}\widehat{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}\widehat{X}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1\beta}\widehat{X}_{1\beta} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{\alpha 1}\widehat{X}_{\alpha 1} & \dots & \mathbf{K}_{\alpha\beta}\widehat{X}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}_{t\tau}\widehat{X}_{t\tau} = \sum_{i=1}^{\widehat{k}}\sum_{j=1}^{\widehat{s}} d_{ij}L_{tt}^{(i)}\widehat{X}_{t\tau}R_{\tau\tau}^{(j)},$$

$$\mathbf{N}\widehat{X} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{N}_{12}\widehat{X} & \dots & \mathbf{N}_{1\beta}\widehat{X} \\ \mathbf{N}_{21}\widehat{X} & \mathbf{N}_{22}\widehat{X} & \dots & \mathbf{N}_{2\beta}\widehat{X} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{N}_{\alpha 1}\widehat{X} & \mathbf{N}_{\alpha 2}\widehat{X} & \dots & \mathbf{N}_{\alpha\beta}\widehat{X} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{t\tau}\widehat{X} = \sum_{\xi=1}^{t}\sum_{\zeta=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{\widehat{k}}\sum_{j=1}^{\widehat{s}} d_{ij}L_{t\xi}^{(i)}\widehat{X}_{\xi\zeta}R_{\zeta\tau}^{(j)}, \quad \xi+\zeta < t+\tau.$$

Рівняння (1.15) зводиться до системи $\alpha\beta$ матричних рівнянь:

$$\mathbf{K}_{11}\widehat{X}_{11} = \widehat{Y}_{11}, \quad \mathbf{K}_{t\tau}\widehat{X}_{t\tau} + \mathbf{N}_{t\tau}\widehat{X} = \widehat{Y}_{t\tau}, \quad t+\tau > 2, \tag{1.29}$$

де $\widehat{X}_{t\tau} \in \mathbb{C}^{l_{t2}\times r_{\tau 1}}$ і $\widehat{Y}_{t\tau} \in \mathbb{C}^{l_{t1}\times r_{\tau 2}}$ — блоки відповідних матриць X і Y, $t = \overline{1,\alpha}$, $\tau = \overline{1,\beta}$.

Нехай всі діагональні блоки матриць (1.28) є квадратними: $l_{t1} = l_{t2}$, $r_{\tau 1} = r_{\tau 2}$. Оператори $\mathbf{N}_{t\tau}$ діють лише на блоки $\widehat{X}_{\xi\zeta}$ матриці $\widehat{X}$ при $\xi \le t$, $\zeta \le \tau$ і $\xi+\zeta \ne t+\tau$. Це можна використати в рекурентній процедурі виключення невідомих системи (1.29), яка є доведенням такого твердження.

Теорема 1.3 *Матричне рівняння* (1.15) *з квазітрикутними коефіцієнтами* (1.28) *має єдиний розв'язок за довільної правої частини тоді і лише тоді, коли всі оператори* $\mathbf{K}_{t\tau}$ *є оборотними. При цьому розв'язок має вигляд*

$$\widehat{X} = \widehat{Y}_1 + \mathbf{N}_1\widehat{Y}_1 + \ldots + \mathbf{N}_1^{\nu-1}\widehat{Y}_1, \quad \nu = \alpha+\beta-1, \tag{1.30}$$

де

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{N}, \quad \widehat{Y}_1 = \mathbf{K}^{-1}\widehat{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{-1}\widehat{Y}_{11} & \ldots & \mathbf{K}_{1\beta}^{-1}\widehat{Y}_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{\alpha 1}^{-1}\widehat{Y}_{\alpha 1} & \ldots & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{-1}\widehat{Y}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}.$$

Зауважимо, що за умов (1.28) спектр оператора $\widehat{\mathbf{M}}$ є об'єднанням спектрів усіх операторів $\mathbf{K}_{t\tau}$. Оператори $\mathbf{N}$ і $\mathbf{N}_1$ є нільпотентними. Їхні індекси нільпотентності збігаються і не перевищують ν. Якщо матриці (1.28) трикутні, то оператори $\mathbf{K}$ і $\mathbf{K}^{-1}$ визначають *добуток Шура*:

$$\mathbf{K}\widehat{X} = \Omega \odot \widehat{X}, \quad \mathbf{K}^{-1}\widehat{Y} = \Delta \odot \widehat{Y}, \tag{1.31}$$

де

$$\Omega = \Sigma_l D \Sigma_r^\top = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \ldots & \omega_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{\alpha 1} & \ldots & \omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \ \Delta = \begin{bmatrix} 1/\omega_{11} & \ldots & 1/\omega_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/\omega_{\alpha 1} & \ldots & 1/\omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} L_{11}^{(1)} & \ldots & L_{11}^{(\widehat{k})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{\alpha\alpha}^{(1)} & \ldots & L_{\alpha\alpha}^{(\widehat{k})} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{bmatrix} R_{11}^{(1)} & \ldots & R_{11}^{(\widehat{s})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{\beta\beta}^{(1)} & \ldots & R_{\beta\beta}^{(\widehat{s})} \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку спектр $\sigma(\widehat{\mathbf{M}})$ утворюють елементи матриці Ω, а нерівності

$$w_{t\tau} = \sum_{i=1}^{\widehat{k}} \sum_{j=1}^{\widehat{s}} d_{ij} L_{tt}^{(i)} R_{\tau\tau}^{(j)} \neq 0, \quad t = \overline{1, \alpha}, \quad \tau = \overline{1, \beta}, \tag{1.32}$$

є критерієм однозначної розв'язності рівняння (1.15).

Умови розв'язності і розв'язки вихідного рівняння (1.14) можна отримати за допомогою наведених співвідношень і наслідків теореми 1.2 для різних варіантів системи перетворень (1.16), зокрема (1.24)—(1.27).

Основні теореми про інерцію розв'язків. Розглянемо клас симетризованих матричних рівнянь:

$$\mathbf{M}X = Y, \quad \mathbf{M}X \triangleq \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j^* \equiv A(C \otimes X)A^*, \tag{1.33}$$

де C, X і Y — ермітові матриці відповідно порядку k, n і p , $A = \left[\, A_1, \ldots, A_k \,\right]$, $A_i \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $i = \overline{1, k}$. Вивчимо властивості оператора $\mathbf{M}$ та інерцію ермітових розв'язків рівняння (1.33), використовуючи системи перетворень типу (1.24)—(1.27):

$$P_1 A P^{(2)} = L,\ C = S_1 D S_1^*,\ P_1 Y P_1^* = \widehat{Y},\ X = P_2 \widehat{X} P_2^*; \tag{1.34}$$

$$A P^{(2)} = P_3 L,\ C = S_1 D S_1^*,\ Y = P_3 \widehat{Y} P_3^*,\ X = P_2 \widehat{X} P_2^*; \tag{1.35}$$

$$P_1 A = L P^{(4)},\ S_3 C S_3^* = D,\ P_1 Y P_1^* = \widehat{Y},\ P_4 X P_4^* = \widehat{X}; \tag{1.36}$$

$$A = P_3 L P^{(4)},\ S_3 C S_3^* = D,\ Y = P_3 \widehat{Y} P_3^*,\ P_4 X P_4^* = \widehat{X}. \tag{1.37}$$

Нехай існує одна із систем перетворень (1.34)—(1.37), з якої отримано сім'ю трикутних матриць:

$$L_i = \begin{bmatrix} l_{11}^{(i)} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21}^{(i)} & l_{22}^{(i)} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ l_{\alpha 1}^{(i)} & l_{\alpha 2}^{(i)} & \ldots & l_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \widehat{k}}. \tag{1.38}$$

При цьому $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, а $P_1, \ldots, P_4$ — деякі матриці повного рангу α. Для кожної із систем (1.34)—(1.37) визначимо сім'ї матриць $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{t,\tau=0}^{\alpha} \mathcal{X}_{t\tau}$ і $\mathcal{Y} = \bigcup\limits_{t,\tau=0}^{\alpha} \mathcal{Y}_{t\tau}$, де

$$\mathcal{X}_{t\tau} = \{X : \mathrm{i}_+(\widehat{X}) = t, \mathrm{i}_-(\widehat{X}) = \tau\}, \mathcal{Y}_{t\tau} = \{Y : \mathrm{i}_+(\widehat{Y}) = t, \mathrm{i}_-(\widehat{Y}) = \tau\}.$$

Для систем (1.34) або (1.35) $\mathcal{X}$ — множина ермітових матриць, які подаються у вигляді $X = P_2 \widehat{X} P_2^*$. При цьому, якщо $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$, то $\mathrm{i}_+(X) = t$, $\mathrm{i}_-(X) = \tau$, оскільки P_2 — матриця повного рангу за стовпцями.

Для систем (1.36) або (1.37) $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ означає, що $\widehat{X} = P_4 X P_4^*$ — ермітова матриця з індексами інерції $\mathrm{i}_+(\widehat{X}) = t \leq \mathrm{i}_+(X)$, $\mathrm{i}_-(\widehat{X}) = \tau \leq \mathrm{i}_-(X)$. Аналогічно, за допомогою матриць P_1 і P_3 описуються множини $\mathcal{Y}$ і $\mathcal{Y}_{t\tau}$. Відмітимо, що при $\alpha = n$ ($\alpha = p$) у кожному випадку (1.34)—(1.37) множина $\mathcal{X}(\mathcal{Y})$ складається з усіх ермітових $\alpha \times \alpha$-матриць, а $\mathcal{X}_{\alpha 0}$ ($\mathcal{Y}_{\alpha 0}$) — підмножина додатно визначених матриць. Множини $\mathcal{X}_{00}$ і $\mathcal{Y}_{00}$ є підпросторами матриць. Для систем (1.35) і (1.37), а також (1.34) і (1.36) при $\alpha = p$ підпростір $\mathcal{Y}_{00}$ є нульовим.

Разом з (1.33) розглянемо матричне рівняння

$$\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} = \widehat{Y}, \quad \widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} \triangleq \sum_{i,j=1}^{\widehat{k}} d_{ij} L_i \widehat{X} L_j^* \equiv L(D \otimes \widehat{X})L^*. \tag{1.39}$$

Для кожної системи (1.34)—(1.37) оператори $\mathbf{M}$ і $\widehat{\mathbf{M}}$ пов'язані одним із співвідношень

$$P_1(\mathbf{M}X)P_1^* = \widehat{\mathbf{M}}\widehat{X}, \quad \mathbf{M}X = P_3(\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X})P_3^*. \tag{1.40}$$

З огляду на рангові обмеження на $P_1, \ldots, P_4$ рівність $\mathcal{Y} = \mathbf{M}\mathcal{X} + \mathcal{Y}_{00}$ виконується тоді і лише тоді, коли

$$\omega_{t\tau} = \sum_{i,j=1}^{\widehat{k}} d_{ij}\, l_{tt}^{(i)}\, \overline{l_{\tau\tau}^{(j)}} \neq 0, \quad t, \tau = \overline{1, \alpha}, \tag{1.41}$$

де $\omega_{t\tau}$ — власні числа оператора $\widehat{\mathbf{M}}$. При цьому

$$\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \gamma_{t\tau}^{ij}\, E_{ti}\widehat{X}E_{\tau j}^{*}, \quad \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widehat{Y} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \theta_{t\tau}^{ij}\, E_{ti}\widehat{Y}E_{\tau j}^{*}, \tag{1.42}$$

де E_{pq} — матриці з єдиним ненульовим елементом, що дорівнює 1 і розміщений на перетині p-го рядка і q-го стовпця, $\gamma_{t\tau}^{ij}$ і $\theta_{t\tau}^{ij}$ — скалярні коефіцієнти, пов'язані рекурентними співвідношеннями

$$\gamma_{t\tau}^{t\tau} = \omega_{t\tau},\ \theta_{t\tau}^{t\tau} = \frac{1}{\omega_{t\tau}},\ \sum_{\xi=i}^{t}\sum_{\zeta=j}^{\tau}\gamma_{\xi\zeta}^{ij}\,\theta_{t\tau}^{\xi\zeta} = 0,\ i \le t,\ j \le \tau,\ i+j < t+\tau.$$

Сформуємо із скалярних коефіцієнтів розкладів (1.42) блокові матриці

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{\alpha 1} & \dots & \Gamma_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{\alpha 1} & \dots & \Theta_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \tag{1.43}$$

де $\Gamma_{t\tau} = \|\gamma_{t\tau}^{ij}\|_{i,j=1}^{t,\tau}$, $\Theta_{t\tau} = \|\theta_{t\tau}^{ij}\|_{i,j=1}^{t,\tau}$, і виділимо головні підматриці із власних значень операторів (1.42):

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{\alpha 1} & \dots & \omega_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1/\omega_{11} & \dots & 1/\omega_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/\omega_{\alpha 1} & \dots & 1/\omega_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}.$$

Лема 1.1 *Якщо* $\mathrm{i}_+(\Omega) = 1$, *то умови* (1.41) *і матрична нерівність* $\Delta \ge 0$ *виконуються тоді і лише тоді, коли всі діагональні елементи матриці* Ω *додатні:*

$$\omega_{tt} > 0, \quad t = \overline{1,\alpha}. \tag{1.44}$$

Якщо $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$, *то умови* (1.41) *і матрична нерівність* $\Theta \ge 0$ *еквівалентні скалярним нерівностям* (1.44).

Лема 1.2 *Нехай* $\Delta \in \mathcal{H}_n$ *— ермітова матриця. Тоді* $\Delta \odot H \ge 0$ *для довільної матриці* $H \ge 0$ *тоді і лише тоді, коли* $\Delta \ge 0$. *Строга нерівність* $\Delta \odot H > 0$ *виконується для довільної матриці* $H > 0$ *тоді і лише тоді, коли* $\Delta \ge 0$ *і всі діагональні елементи матриці* Δ *додатні.*

Теорема 1.4 *Якщо виконуються нерівності*

$$\omega_{tt} \neq 0, \quad t = \overline{1, \alpha}, \tag{1.45}$$

то існують матриці $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ *і* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, *що задовольняють рівняння* (1.33). *При цьому* t *і* τ *збігаються з кількостями додатних і від'ємних чисел* (1.45)*:*

$$t = \sum_{s=1}^{\alpha} \mathrm{i}_+(\omega_{ss}), \quad \tau = \sum_{s=1}^{\alpha} \mathrm{i}_-(\omega_{ss}), \quad t + \tau = \alpha. \tag{1.46}$$

Якщо

$$\mathrm{i}_+(\Gamma) \leq 1, \quad \mathrm{i}_-(\Gamma) \leq 1 \tag{1.47}$$

та існують матриці $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ *і* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, *що задовольняють умову* $Y - \mathbf{M}X \in \mathcal{Y}_{00}$, *то виконуються співвідношення* (1.45) *і* (1.46).

Теорема 1.5 *Якщо виконуються нерівності* (1.44), *то існують матриці* $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ *і* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, *що задовольняють рівняння* (1.33). *Якщо* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$ *та існують матриці* $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ *і* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, *що задовольняють умову* $Y - \mathbf{M}X \in \mathcal{Y}_{00}$, *то виконуються нерівності* (1.44).

Теорема 1.6 *За умов* (1.41) *і* $\Theta \geq 0$ *виконується включення*

$$\mathcal{Y}_{\alpha 0} \subseteq \mathbf{M}\mathcal{X}_{\alpha 0} + \mathcal{Y}_{00}. \tag{1.48}$$

Нерівності (1.41), (1.44) *і* $\Delta \geq 0$ *є наслідком включення* (1.48).

Відмітимо, що обмеження на інерцію матриць Γ і Ω у твердженнях леми 1.1 і теорем 1.4—1.6 можна замінити аналогічними властивостями інерції матриць C і D. Оскільки

$$\Gamma = ZDZ^*, \;\; Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_\alpha \end{bmatrix}, \;\; Z_t = \begin{bmatrix} l_{t1}^{(1)} & \dots & l_{t1}^{(\widehat{k})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{tt}^{(1)} & \dots & l_{tt}^{(\widehat{k})} \end{bmatrix}, \;\; t = \overline{1, \alpha},$$

то $i_\pm(\Gamma) \leq i_\pm(D)$. При використанні системи перетворень (1.36) і (1.37) $i_\pm(D) \leq i_\pm(C)$. Для систем (1.34) і (1.35) виконуються протилежні нерівності. Якщо всі матриці (1.38) діагональні, то елементи матриць Γ і Θ, що не належать відповідним підматрицям Ω і Δ, є нульовими. У цьому випадку включення (1.48) еквівалентне умовам (1.41) і $\Delta \geq 0$, а твердження теореми 1.6 випливають із леми 1.2. Якщо $\theta_{t\tau}^{ij} = 0$ при $(t,i) \notin \Sigma$ або $(\tau,j) \notin \Sigma$, де $\Sigma = \{(t,i) : \max\{t-1,1\} \leq i \leq t \leq \alpha\}$, то включення (1.48) еквівалентне умовам (1.41) і $\Theta \geq 0$.

Нехай задано сім'ю матриць $A_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\lambda \in \Lambda$, де Λ — деяка множина індексів. Як A_λ може бути матрична функція, однозначно визначена на множині параметрів Λ, або набор матриць однакових розмірів.

Означення 1.1 Сім'ю A_λ називають *колективом порядку* α, якщо існують матриці $P_1 \in \mathbb{C}^{\alpha\times n}$ і $P_2 \in \mathbb{C}^{m\times\alpha}$ повного рангу α, незалежні від λ і такі, що всі матриці $L_\lambda = P_1 A_\lambda P_2 \in \mathbb{C}^{\alpha\times\alpha}$ мають трикутну форму одного типу (нижню або верхню). Зокрема, якщо всі матриці L_λ діагональні, то колектив A_λ *ідеальний*. Колектив A_λ порядку α називається *правим*, *лівим* або *нейтральним*, якщо відповідно $A_\lambda P_2 = P_3 L_\lambda$, $P_1 A_\lambda = L_\lambda P_4$ або $A_\lambda = P_3 L_\lambda P_4$ при $\lambda \in \Lambda$, де $P_3 \in \mathbb{C}^{n\times\alpha}$ і $P_4 \in \mathbb{C}^{\alpha\times m}$ — матриці повного рангу α. Вектори $l_\lambda \in \mathbb{C}^\alpha$, що сформовані із діагональних елементів матриць L_λ, є *власністю колективу* A_λ.

Якщо $P_2 = P_1^{-1}$, то колектив A_λ порядку $\alpha = n$ є сім'я матриць, які одночасно можна звести до трикутної форми за допомогою перетворення подібності. У цьому випадку вектори власності l_λ складаються із власних значень відповідних матриць A_λ.

Сім'я аналітичних *функцій від матриці* $f_k(A)$ $(k = 1, 2, \dots)$ є колектив порядку n з векторами власності l_k, компонентами яких є значення функцій f_k на спектрі $\sigma(A)$. *Квазікомутуючі* набори матриць $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, що задовольняють співвідношення

$$A_k(A_iA_j - A_jA_i) = (A_iA_j - A_jA_i)A_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots,$$

одночасно можна звести до трикутної форми перетворенням подібності [92, 119] і є колективами порядку n. Якщо A_k

($k = 1, 2, \dots$) — колектив порядку α, то матрична функція $A_\lambda = \sum\limits_k f_k(\lambda) A_k$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) також є колективом порядку α. Зокрема, регулярна в'язка матриць $A_\lambda = A - \lambda B$ є колективом порядку n з векторами власності, які визначаються канонічною формою такої в'язки (див. підрозд. 8.5).

Розглянемо рівняння (1.33), матричні коефіцієнти A_i якого складають колектив порядку $\alpha \leq \min\{n, p\}$. Тоді можна побудувати систему перетворень (1.34), за допомогою якої отримують рівняння (1.39) з трикутними коефіцієнтами (1.38). При цьому скалярні коефіцієнти можна залишити без змін, поклавши $D = C$. Якщо колектив A_i є правим, лівим або нейтральним, то використовуються відповідні системи перетворень (1.35), (1.36) або (1.37). Матрицю із власних значень оператора $\widehat{\mathbf{M}}$ можна подати у вигляді $\Omega = \|\omega_{ij}\|_{i,j=1}^{\alpha} = \Sigma\, C\, \Sigma^*$, де $\Sigma = \big[\, l_1, \dots, l_k \,\big]$, $l_t \in \mathbb{C}^\alpha$ — вектори власності колективу A_i. Теореми 1.4—1.6 дають загальну методику вивчення та оцінювання елементів власності колективу A_i в термінах індексів інерції ермітових розв'язків рівняння (1.33). Наведемо наслідки цих теорем у випадку $\alpha = n = p$.

Теорема 1.7 *Матрична нерівність*

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j^* > 0 \tag{1.49}$$

має розв'язок тоді і лише тоді, коли $\omega_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. При цьому існує розв'язок $X = X^*$, для якого

$$\mathrm{i}_+(X) = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{i}_+(\omega_{ss}), \quad \mathrm{i}_-(X) = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{i}_-(\omega_{ss}), \quad \mathrm{i}_0(X) = 0. \tag{1.50}$$

Якщо $\mathrm{i}_\pm(C) \leq 1$ і $X = X^*$ — довільний розв'язок матричної нерівності (1.49), *то виконуються співвідношення* (1.50).

Теорема 1.8 *Якщо $\omega_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$, то існує розв'язок $X > 0$ матричної нерівності* (1.49). *Зворотне твердження виконується за обмеження $\mathrm{i}_+(C) = 1$.*

Теорема 1.9 *Нерівності* $\left\|\omega_{ij}^{-1}\right\|_{i,j=1}^{n} \geq 0$, $\omega_{ij} \neq 0$ $(i,j=\overline{1,n})$ *необхідні, а співвідношення* $\mathrm{i}_+(C)=1$, $w_{ii}>0$ $(i=\overline{1,n})$ *достатні для того, щоб рівняння* (1.33) *мало розв'язок* $X>0$ *за довільної правої частини* $Y>0$.

Наведені твердження можна посилити у випадку ідеального колективу A_i, $i=\overline{1,k}$.

1.2 Узагальнене рівняння Ляпунова для аналітичних кривих

Розглянемо лінійне матричне рівняння

$$\mathbf{L}_f X \triangleq -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\omega}\oint\limits_{\overline{\omega}} f(\lambda,\overline{\mu})(A-\lambda I_n)^{-1}X(A-\mu I_n)^{-1*}d\lambda\, d\overline{\mu}=Y, \tag{1.51}$$

де $A,Y\in\mathbb{C}^{n\times n}$ — задані матриці, X — невідома матриця, ω $(\overline{\omega})$– простий замкнений контур, що охоплює спектр $\sigma(A)$ $(\sigma(A^*))$ і відокремлює у комплексній площині $\mathbb{C}$ замкнену область Ω $(\overline{\Omega})$, $f\in\mathcal{H}$ — *ермітова функція*, що задовольняє тотожність $f(\lambda,\overline{\mu})\equiv\overline{f(\mu,\overline{\lambda})}$, є аналітичною в області $\Omega\times\overline{\Omega}$ і описує множини

$$\Lambda_f^{+}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}: f(\lambda,\overline{\lambda})>0\right\}, \tag{1.52}$$

$$\Lambda_f^{-}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}: f(\lambda,\overline{\lambda})<0\right\}, \tag{1.53}$$

$$\Lambda_f^{0}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}: f(\lambda,\overline{\lambda})=0\right\}. \tag{1.54}$$

Оператор Далецького—Крейна $\mathbf{L}_f$ зберігає простір ермітових матриць $\mathcal{H}_n$. Для класу ермітових функцій з розділеними змінними

$$f(\lambda,\overline{\mu})=\sum_{p,q}\gamma_{pq}f_p(\lambda)\,\overline{f_q(\mu)}, \tag{1.55}$$

$$\mathbf{L}_f X=\sum_{p,q}\gamma_{pq}f_p(A)Xf_q(A)^*,\ f_p(A)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega}f_p(\lambda)(A-\lambda I_n)^{-1}d\lambda,$$

де γ_{pq} — елементи ермірової матриці Γ, $f_p(A)$ — аналітичні *функції від матриці* A. Спектральні й алгебричні властивості лінійних операторів типу $\mathbf{L}_f$ описано в [26, 49].

Спектр $\sigma(\mathbf{L}_f)$ складається із n^2 чисел $f(\lambda_i, \overline{\lambda}_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, де $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — спектр матриці A. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ — усі попарно різні точки $\sigma(A)$. Тоді *характеристичний і мінімальний поліноми* матриці A мають вигляди

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_\alpha)^{n_\alpha}, \quad \theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_\alpha)^{m_\alpha},$$

де $m_t \le n_t$, $t = \overline{1, \alpha}$, $m = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} m_t \le n = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} n_t$. Критерієм оборотності оператора $\mathbf{L}_f$ є система нерівностей

$$f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) \ne 0, \quad t, \tau = \overline{1, \alpha}. \tag{1.56}$$

При цьому обернений оператор $\mathbf{L}_f^{-1} = \mathbf{L}_\varphi$, де $\varphi(\lambda, \overline{\mu}) = 1/f(\lambda, \overline{\mu})$.

Визначимо кількості точок спектра $\sigma(A)$, що належать множинам (1.52)—(1.54):

$$\mathrm{i}_f^+(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^+} n_t, \;\; \mathrm{i}_f^-(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^-} n_t, \;\; \mathrm{i}_f^0(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} n_t. \tag{1.57}$$

Ставиться задача оцінити числа (1.57) в термінах індексів інерції розв'язків рівняння (1.51). Зокрема, цікавими є умови, за яких $\mathrm{i}_f^+(A) = n$, тобто $\sigma(A) \subseteq \Lambda_f^+$.

Застосовуючи розклад *резольвенти*:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti},$$

і знаходячи похідні інтегралів типу Коші, маємо

$$\mathbf{L}_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t} f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) A_{ti} X A_{\tau j}^* = \sum_{p,q=1}^{m} \gamma_{pq} A^p X A^{q*}, \tag{1.58}$$

де $f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) = \dfrac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \overline{\lambda}_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)$ і $\gamma_{pq} = \overline{\gamma}_{qp}$ — скалярні коефіцієнти, а A_{ti} — *компоненти матриці* A, які подаються у вигляді поліномів від A.

Нехай $\mathcal{K}_n$ — множина ермітових невід'ємно визначених матриць порядку n. Ця множина є *відтворювальним конусом* простору $\mathbb{C}^{n\times n}$. Оператор $\mathbf{L}_f$, що залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_n$, є *додатним* щодо $\mathcal{K}_n$. Оператор $\mathbf{L}_f$ *додатно оборотний*, якщо $\mathcal{K}_n \subseteq \mathbf{L}_f\mathcal{K}_n$, тобто обернений оператор $\mathbf{L}_f^{-1}$ є додатним. Ця властивість оператора $\mathbf{L}_f$ означає, що для довільної матриці $Y > 0$ ($Y \geq 0$) рівняння (1.51) має розв'язок $X > 0$ ($X \geq 0$).

На підставі формули (1.58) і відомих властивостей компонент матриці [21] доводяться такі твердження.

Лема 1.3 *Існують матриці $X > 0$ і $Y > 0$, що задовольняють рівняння* (1.51) *тоді і лише тоді, коли*

$$f(\lambda_t, \overline{\lambda}_t) > 0, \quad t = \overline{1, \alpha}. \tag{1.59}$$

Лема 1.4 *Оператор $\mathbf{L}_f$ є додатним щодо конуса $\mathcal{K}_n$ тоді і лише тоді, коли*

$$\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{\alpha 1} & \cdots & F_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{1.60}$$

де $F_{t\tau} = \|f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)\|_{i,j=1}^{m_t, m_\tau}$, $t, \tau = \overline{1, \alpha}$. Оператор $\mathbf{L}_f$ залишає інваріантною множину додатно визначених матриць тоді і лише тоді, коли виконується система нерівностей (1.59) *і* (1.60).

Лема 1.5 *Оператор $\mathbf{L}_f$ є додатно оборотним щодо конуса $\mathcal{K}_n$ тоді і лише тоді, коли виконуються нерівності* (1.56) *і матрична нерівність*

$$\Gamma_\varphi \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \varphi(\lambda, \overline{\mu}) \triangleq \frac{1}{f(\lambda, \overline{\mu})}. \tag{1.61}$$

Лема 1.6 *Якщо*

$$\mathrm{i}_+ \left(\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \right) = 1, \tag{1.62}$$

то система нерівностей (1.56) *і* (1.61) *еквівалентна* (1.59).

Для матриці простої структури умова (1.61) подається у вигляді

$$\Gamma_\varphi \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} = \left\| \frac{1}{f(\lambda_i, \overline{\lambda}_j)} \right\|_{i,j=1}^{m} \geq 0. \qquad (1.63)$$

Нехай $\mathcal{H}_0^m$ — клас ермітових функцій $f \in \mathcal{H}$, що задовольняють умову (1.63) для довільного набору точок $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ із області Λ_f^+ вигляду (1.52).

Лема 1.7 *Якщо* $f \in \mathcal{H}_0^m$, *то нерівність* (1.61) *виконується для довільних наборів точок* $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha \in \Lambda_f^+$ *і натуральних чисел* $m_1, \dots, m_\alpha$, *сума яких не перевищує* m.

Теорема 1.10 (узагальнена теорема Ляпунова). *Нехай задані матриця* $A \in C^{n\times n}$ *і функція* $f \in \mathcal{H}_0^m$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) *спектр матриці* A *розміщений в області* Λ_f^+;

2) *існують матриці* $X > 0$ *і* $Y > 0$, *що задовольняють рівняння* (1.51);

3) *для довільної матриці* $Y > 0$ *рівняння* (1.51) *має єдиний розв'язок* $X > 0$;

4) *оператор* $\mathbf{L}_f$ *є додатно оборотним щодо конуса невід'ємно визначених матриць* $\mathcal{K}_n$.

Теорема 1.10 є критерієм належності спектра матриці максимально допустимого класу областей типу Λ_f^+. Дійсно, якщо умова (1.63) порушена за деяких $\lambda_t \in \Lambda_f^+$, то за лемою 1.5 критерій включення $\sigma(A) \subseteq \Lambda_f^+$ не виконується для довільної матриці A з власними значеннями λ_t, $t = \overline{1, m}$. Якщо степінь мінімального полінома матриці A не відомий, то в умовах теореми 1.10 можна покласти $f \in \mathcal{H}_0^n$.

Виділимо в $\mathcal{H}_0^m$ важливі підкласи ермітових функцій, які визначаються простішими співвідношеннями ніж (1.63) і містять деякі відомі класи функцій. При цьому припускаємо, що кожна із множин (1.52) – (1.54) не є пустою.

Можна встановити, що класу $\mathcal{H}_0^m$ належать ермітові функції, які подають у вигляді $f(\lambda, \overline{\mu}) = u(\lambda, \overline{\mu}) - v(\lambda, \overline{\mu})$, де u і v такі, що

$\Lambda_f^+ \subset \Lambda_u^+$ і для довільних $\lambda, \mu \in \Lambda_f^+$ виконуються нерівності

$$|u(\lambda, \overline{\mu})|^2 \geq u(\lambda, \overline{\lambda})\, u(\mu, \overline{\mu}), \quad |v(\lambda, \overline{\mu})|^2 \leq v(\lambda, \overline{\lambda})\, v(\mu, \overline{\mu}).$$

Маємо таку схему включень:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_2 & \subset & \mathcal{H}_1 & \subset & \mathcal{H}_0 & & \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ \mathcal{H}_2^m & \subset & \mathcal{H}_1^m & \subset & \mathcal{H}_0^m & \subset & \mathcal{H}\,. \end{array}$$

Тут підкласи функцій визначено у вигляді

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_0: \quad f(\lambda, \overline{\mu}) \neq 0, \ \frac{1}{f(\lambda, \overline{\mu})} = \sum_k \varphi_k(\lambda)\, \overline{\varphi_k(\mu)} \ \ \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_f^+; \\ &\mathcal{H}_1: \quad f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)} - \sum_{k>1} f_k(\lambda)\, \overline{f_k(\mu)}; \\ &\mathcal{H}_2: \quad f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)} - f_2(\lambda)\, \overline{f_2(\mu)}; \\ &\mathcal{H}_1^m: \quad \mathrm{i}_+ \left(\left\| f(\mu_i, \overline{\mu}_j) \right\|_1^m \right) = 1 \quad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda_f^+; \\ &\mathcal{H}_2^m: \quad \mathrm{i}_\pm \left(\left\| f(\mu_i, \overline{\mu}_j) \right\|_1^m \right) \leq 1 \quad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \notin \Lambda_f^0. \end{aligned}$$

Кожна функція (1.55) належить класу $\mathcal{H}_1$, якщо виконується одна з еквівалентних умов $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$, $\operatorname{rank}\Gamma + \operatorname{sign}\Gamma = 2$ або $\Gamma z z^* \Gamma - (z^* \Gamma z)\Gamma \geq 0$, де z — будь-який вектор, для якого $z^*\Gamma z > 0$. Зокрема, функція (1.55) описує алгебричну криву другого порядку, якщо [28]

$$f_1(\lambda) = 1, \ \ f_2(\lambda) = \lambda, \ \ f_3(\lambda) = \lambda^2, \ \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \gamma_{22} \leq 0.$$

Клас $\mathcal{H}_2$ утворюють функції (1.55) за умов $\operatorname{rank}\Gamma = 2$ і $\operatorname{sign}\Gamma = 0$.

Відомо, що матриця A не має чисто уявних власних значень тоді і лише тоді, коли ЛМН $AX + XA^* > 0$ має розв'язок X. При цьому кількості точок спектра $\sigma(A)$ з додатними і від'ємними дійсними частинами дорівнюють відповідно $\mathrm{i}_+(X)$ і $\mathrm{i}_-(X)$. Це твердження дає розподіл спектра $\sigma(A)$ відносно уявної осі в термінах індексів інерції ермітових форм (*теореми Островського–Шнайдера* і *Тауссюі*).

Нехай $\mathrm{i}_f^+(A)$, $\mathrm{i}_f^-(A)$, $\mathrm{i}_f^0(A)$ — кількості точок спектра $\sigma(A)$ з урахуванням кратностей, що належать відповідним множинам (1.52), (1.53) і (1.54). Рівність $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$ визначає властивість *дихотомії спектра* відносно кривої Λ_f^0.

Лема 1.8 *Нехай функція $f \in \mathcal{H}$ задовольняє співвідношення*

$$\mathrm{i}_\pm \left(\Gamma_f \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{pmatrix} \right) \leq p_\pm \quad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda,$$

де $p_\pm \geq 0$ — цілі числа, $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ — деяка відкрита множина. Тоді для довільних наборів точок $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha \in \Lambda$ і натуральних чисел $m_1, \ldots, m_\alpha$, сума яких не перевищує m,

$$\mathrm{i}_\pm \left(\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \right) \leq p_\pm. \tag{1.64}$$

На підставі розкладу (1.58) і леми 1.8 при $p_\pm = 1$ встановлюється таке твердження.

Теорема 1.11 (узагальнена теорема інерції). *Матрична нерівність*

$$\mathbf{L}_f X > 0 \tag{1.65}$$

сумісна тоді і лише тоді, коли $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$. При цьому існує розв'язок $X = X^*$, для якого

$$\mathrm{i}_f^+(A) = \mathrm{i}_+(X), \quad \mathrm{i}_f^-(A) = \mathrm{i}_-(X), \quad \mathrm{i}_0(X) = 0. \tag{1.66}$$

Якщо X — розв'язок нерівності (1.65) *при $f \in \mathcal{H}_2^m$, то $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$ і виконуються співвідношення* (1.66).

Наслідок 1.2 *Нехай $f \in \mathcal{H}_2$, $Y > 0$ і X — розв'язок рівняння* (1.51). *Тоді крива* (1.54) *не перетинається зі спектром $\sigma(A)$, а в областях* (1.52) *і* (1.53) *знаходяться відповідно* $\mathrm{i}_+(X)$ *і* $\mathrm{i}_-(X)$ *власних значень матриці A, враховуючи кратності.*

Наступне твердження розв'язує задачу про належність власних значень матриці заданій кривій Λ_f^0. Такі задачі виникають, наприклад, під час дослідження стійкості й аперіодичності деяких механічних систем.

Теорема 1.12 *Якщо однорідне матричне рівняння*

$$\mathbf{L}_f X = 0 \tag{1.67}$$

має ненульовий розв'язок $X \geq 0$, *то* $\mathrm{i}_f^0(A) \geq \operatorname{rank} X$. *При цьому, якщо* $X > 0$, *то* $\sigma(A) \subseteq \Lambda_f^0$. *Навпаки, якщо* $\mathrm{i}_f^0(A) \neq 0$, *то рівняння* (1.67) *має невід'ємно визначений розв'язок будь-якого рангу з інтервалу* $0 < \operatorname{rank} X \leq \sum\limits_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} \xi_t$, *де* ξ_t *— геометрична кратність власного значення* $\lambda_t \in \sigma(A)$.

Якщо матриця A має *просту структуру*, тобто $\xi_t = n_t$, $t = \overline{1, \alpha}$, то за теоремою 1.12 оцінка $\mathrm{i}_f^0(A) \geq r$ виконується тоді і лише тоді, коли рівняння (1.67) має невід'ємно визначений розв'язок рангу r.

На підставі теорем 1.10—1.12 можна описати різні області й множини в комплексній площині, яким належить увесь спектр матриці або його частина (див. [49, с. 51—56]). Деякі твердження наведених теорем можна посилити, використовуючи додаткові обмеження типу керованості пари матриць та її узагальнень.

Означення 1.2 Пару матриць (A, B) відповідних розмірів $n \times n$ і $n \times m$ називають *керованою*, якщо для деякого k виконується рівність $\operatorname{rank}\left[\, B, AB, \ldots, A^k B \,\right] = n$.

Лема 1.9 *Наступні твердження є еквівалентними:*
1) *пара матриць* (A, B) *керована;*
2) $\operatorname{rank}\left[\, B, \lambda I_n - A \,\right] \equiv n$, $\lambda \in \sigma(A)$;
3) *пара матриць* (A, X), *де* $X = BB^*$, *керована;*
4) $X + (\lambda I_n - A)(\lambda I_n - A)^* > 0$, $\lambda \in \sigma(A)$;
5) *існує функція* $f \in \mathcal{H}$ *така, що* $L_f X > 0$.

Лема 1.10 *Для матричної послідовності*

$$X_1 \geq 0, \quad X_{k+1} = X_1 + \mathbf{L} X_k, \quad k = 1, 2, \ldots \,,$$

де $\mathbf{L}$ *— лінійний оператор, додатний щодо конуса* $\mathcal{K}_n$, *виконуються рангові співвідношення* $r_1 < r_2 < \cdots < r_q = r_{q+1} = \cdots = r$ $(q \leq n - r_1 + 1,\ r_k = \operatorname{rank} X_k,\ k = 1, 2, \ldots)$.

Поклавши в лемі 1.10 $X_1 = BB^*$ і $\mathbf{L}X = AXA^*$, маємо властивість керованості пари матриць (A, B) у вигляді рівності $r = n$, причому $q \leq \min\{m, n - r_1 + 1\}$, де m — степінь мінімального полінома матриці A.

Теорема 1.13 *Нехай матриці X і Y задовольняють рівняння* (1.51). *Тоді виконуються такі твердження:*

1) *із керованості пари (A, Y) випливає керованість пари (A, X);*

2) *якщо $X \geq 0$ і $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$, то із керованості пари (A, X) випливає керованість пари (A, Y);*

3) *якщо $Y \geq 0$ і пара (A, Y) керована, то $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$;*

4) *якщо $X \geq 0$, $Y \geq 0$ і пара (A, Y) керована, то $\mathrm{i}_f^+(A) = n$;*

5) *якщо $X \geq 0$, $Y \geq 0$ і пара (A, X) керована, то $\mathrm{i}_f^-(A) = 0$;*

6) *якщо $X \geq 0$, $Y = 0$ і пара (A, X) керована, то $\mathrm{i}_f^0(A) = n$.*

Теорема 1.14 *Нехай $f = u - v \in \mathcal{H}_1$, $\psi = \sum\limits_{j=0}^{s} u^{s-j} v^j$, де $u(\lambda, \overline{\mu}) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)}$, $v(\lambda, \overline{\mu}) = \sum\limits_{k>1} f_k(\lambda)\, \overline{f_k(\mu)}$, $s \geq 1$ і*

$$\sigma(A) \subset \Lambda_f^+, \quad \mathbf{L}_\psi Y > 0. \tag{1.68}$$

Тоді рівняння (1.51) *має єдиний розв'язок $X > 0$.*

Навпаки, якщо $X > 0$ — єдиний розв'язок рівняння (1.51) *при $Y \geq 0$, то виконуються умови* (1.68), *де $s = n - \operatorname{rank} Y$.*

Теорема 1.15 *Нехай матриці A, $Y = BB^* \geq 0$ і функція $f(\lambda, \overline{\mu}) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)} - f_2(\lambda)\, \overline{f_2(\mu)}$ класу $\mathcal{H}_2$ задовольняють умову*

$$\operatorname{rank}\left[\, F_0 B, \ldots, F_s B \,\right] = n, \tag{1.69}$$

де $F_k = f_1^{s-k}(A) f_2^k(A)$, $k = \overline{0, s}$, $s = n - \operatorname{rank} Y$, і рівняння (1.51) *має розв'язок X. Тоді $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$ і виконуються співвідношення* (1.66).

Твердження теореми 1.15 виконується за умов керованості пари матриць (A, Y) та обмеження [103]

$$h(\lambda_t) \neq h(\lambda_\tau) \quad (t \neq \tau), \quad h'(\lambda_t) \neq 0 \quad (m_t > 1), \tag{1.70}$$

де $h(\lambda) = [f_1(\lambda) + f_2(\lambda)]/[f_1(\lambda) - f_2(\lambda)]$. Ці обмеження еквівалентні збігу геометричних кратностей власних значень λ_t матриці A з відповідними геометричними кратностями власних значень $h(\lambda_t)$ матриці $h(A)$. При використанні обмеження (1.69), на відміну від (1.70), інформація про спектр $\sigma(A)$ не потрібна.

1.3 Розщеплення та локалізація спектра матричних функцій

Нехай $F(\lambda)$ – матриця розміру $n \times n$, що складається із однозначних аналітичних функцій і задовольняє умову *регулярності* $\chi(\lambda) = \det F(\lambda) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Всі нулі функції $\chi(\lambda)$, враховуючи кратності, утворюють її *спектр* $\sigma(F)$.

Означення 1.3 Матриці $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і $T \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ утворюють *правую пару* (U, T) матричної функції $F(\lambda)$, якщо для деякої аналітичної в околі точок $\sigma(U)$ матриці-функції $\Phi(\lambda)$ виконується тотожність $F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. (U, T) є *лівою парою* $F(\lambda)$, якщо $(U^\top, T^\top)$ — права пара $F^\top(\lambda)$.

Праві та ліві пари (U, T) матричних функцій вигляду $F(\lambda) = \sum\limits_i f_i(\lambda)A_i$, де $f_i(\lambda)$ — скалярні функції, A_i — сталі матриці, визначаються відповідними рівностями:

$$\sum_i A_i T f_i(U) = 0, \quad \sum_i f_i(U) T A_i = 0.$$

Індексом спостережуваності (*керованості*) пари (U, T) називається максимальне значення r неспадної послідовності $r_k = \operatorname{rank} E_k$, де

$$E_k = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{k-1} \end{bmatrix} \ \Big(E_k = \big[\, T, UT, \ldots, U^{k-1}T \,\big] \Big), \ \ k = 1, 2, \ldots$$

При цьому $r_1 < \cdots < r_h = r_{h+1} = \cdots = r$ і виконуються оцінки

$$\operatorname{rank} T + h - 1 \le r \le m, \quad 1 \le h \le m_0, \qquad (1.71)$$

де h — найменше значення індексу k, за якого $r_k = r_{k+1}$, m_0 — степінь мінімального полінома матриці U. Якщо $F(\lambda)$ — матричний поліном степеня s, то $h \leq s$.

Праву спостережувану (ліву керовану) пару (U, T) матричної функції $F(\lambda)$ називають правою (лівою) *власною парою* даної матричної функції. Власну пару (U, T) матричної функції $F(\lambda)$ з максимально можливим порядком m матриці U називають *максимальною*.

Лема 1.11 *Нехай (U, T) — права (ліва) пара матриці-функції $F(\lambda)$ індексу спостережуваності (керованості) r. Тоді принаймні r точок спектра $\sigma(U)$ є власними значеннями матриці-функції $F(\lambda)$. Зокрема, при $r = m$ виконується включення $\sigma(U) \subseteq \sigma(F)$. Зворотне включення $\sigma(F) \subseteq \sigma(U)$ виконується за умови*

$$\operatorname{rank}\left[\, F(\lambda), \Phi(\lambda) \,\right] \equiv n \ \left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} F(\lambda) \\ \Phi(\lambda) \end{bmatrix} \equiv n\right), \quad \lambda \in \sigma(F). \tag{1.72}$$

Доведення цього твердження базується на застосуванні декомпозиції Калмана, яка виділяє спостережувану (керовану) частину лінійної системи [43]. Якщо права (ліва) власна пара (U, T) матриці-функції $F(\lambda)$ задовольняє умову (1.72), то за лемою 1.11 $\sigma(U) = \sigma(F)$ і ця пара є максимальною.

Нехай (U, T) — права (ліва) пара матричної функції $F(\lambda)$ індексу спостережуваності (керованості) r і їй відповідає підмножина спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$ із r власних значень. Вивчимо розміщення точок $\sigma_0(F)$ відносно заданих множин (1.52)—(1.54), використовуючи множини матриць:

$$\mathcal{K} = \{X \colon \mathbf{M}X \geq 0\}, \quad \mathcal{K}_{pq} = \{X \colon \mathrm{i}_+(\mathbf{M}X) = p, \mathrm{i}_-(\mathbf{M}X) = q\}, \tag{1.73}$$

визначені оператором $\mathbf{M}X = E_h X E_h^*$, і співвідношення

$$\mathbf{M}_f X = \mathbf{M}Y, \tag{1.74}$$

$$S_\lambda \geq 0, \quad \operatorname{rank} S_\lambda = r, \quad \lambda \in \sigma_0(F). \tag{1.75}$$

У випадках правої і лівої пар (U, T) відповідно покладемо

$$\mathbf{M}_f X = \mathbf{M}\mathbf{L}_f X, \quad S_\lambda = \mathbf{M}Y + E_h(\lambda I_m - U)(\lambda I_m - U)^* E_h^*;$$

$$\mathbf{M}_f X = \mathbf{L}_f \mathbf{M} X, \quad S_\lambda = \mathbf{M}Y + (\lambda I_m - U)E_h E_h^*(\lambda I_m - U)^*,$$

де оператор

$$\mathbf{L}_f X \triangleq -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\omega} \oint\limits_{\overline{\omega}} f(\lambda, \overline{\mu})(U - \lambda I_m)^{-1} X (U - \mu I_m)^{-1*} d\lambda \, d\overline{\mu}$$

типу (1.51) побудовано для матриці U, а h визначено в (1.71). Якщо $F(\lambda)$ — матричний поліном степеня s, то разом з (1.71) виконується нерівність $h \leq s$.

Теорема 1.16 *Якщо матриці $X \in \mathcal{K}$ і $Y \in \mathcal{K}$ задовольняють співвідношення (1.74) і (1.75), то підмножина спектра $\sigma_0(F)$ належить області Λ_f^+. Якщо, крім того, виконується умова (1.72), то $\sigma_0(F) = \sigma(F) \subset \Lambda_f^+$. Навпаки, якщо $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^+$ і $f \in \mathcal{H}_0^r$, то для будь-якої матриці $Y \in \mathcal{K}$ рівняння (1.74) має розв'язок $X \in \mathcal{K}$.*

Теорема 1.17 *Якщо матриці $X \in \mathcal{K}_{pq}$ і $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ задовольняють рівняння (1.74) і $f \in \mathcal{H}_2^r$, то виконуються рівності*

$$r_+ = p, \quad r_- = q, \quad r_0 = 0, \tag{1.76}$$

де r_+, r_- і r_0 — кількості точок $\sigma_0(F)$, що належать відповідно Λ_f^+, Λ_f^- і Λ_f^0. Навпаки, якщо для деяких p і q виконуються рівності (1.76), то існують матриці $X \in \mathcal{K}_{pq}$ і $Y \in \mathcal{K}_{r0}$, що задовольняють рівняння (1.74).

Теорема 1.18 *Якщо матриці $X \in \mathcal{K}_{p0}$ і $Y \in \mathcal{K}_{00}$ задовольняють рівняння (1.74), то $r_0 \geq p$. Зокрема, при $p = r$ виконується включення $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^0$. Навпаки, якщо $r_0 \neq 0$, $Y \in \mathcal{K}_{00}$, $0 < p \leq \xi$, де ξ — сума геометричних кратностей власних значень матриці U, що належать множині $\sigma_0(F) \cap \Lambda_f^0$, то рівняння (1.74) має розв'язок $X \in \mathcal{K}_{p0}$.*

Доведення теорем 1.16—1.18 базується на застосуванні леми 1.11 і відповідних тверджень теорем 1.10—1.12.

Обмеження (1.72) і (1.75) у теоремі 1.16 у випадку правої пари (U,T) виконуються, якщо

$$F(\lambda)F(\lambda)^* + \Phi(\lambda)Y\Phi(\lambda)^* > 0, \quad \lambda \in \sigma_0(F). \tag{1.77}$$

У випадку лівої пари (U,T) умови (1.75) є наслідком матричної нерівності

$$F(\lambda)F(\lambda)^* + \Psi(\lambda)Y\Psi(\lambda)^* > 0, \quad \lambda \in \sigma_0(F), \tag{1.78}$$

де $\Psi(\lambda) = \left[\, I_m, \lambda I_m, \ldots, \lambda^{h-1} I_m \,\right]$. У випадку застосування теореми 1.16 умови (1.72), (1.75), (1.77) і (1.78) можна перевіряти лише в деякому околі точок $\sigma_0(F)$, що не належать Λ_f^+. Якщо $Y > 0$, то умови (1.75) і (1.78) виконуються за довільних $\lambda \in \mathbb{C}$. Обмеження $f \in \mathcal{H}_0^r$ і $f \in \mathcal{H}_2^r$ у теоремах 1.16 і 1.17 виконуються відповідно при $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$ і $\mathrm{i}_\pm(\Gamma) \le 1$. Якщо $f \in \mathcal{H}_2$, то множину матриць $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ у теоремі 1.17 можна розширити, поклавши $Y \in \mathcal{K}_{p0}$, $p \le r$, і застосувавши додаткові обмеження на f і U (див. теорему 1.15).

Розглянемо клас матричних функцій, які допускають *правильну факторизацію*:

$$F(\lambda) = F_0(\lambda)F_1(\lambda), \quad \sigma(F_0) \cap \sigma(F_1) = \emptyset, \tag{1.79}$$

де $F_1(\lambda) = A - \lambda B$ — *регулярна в'язка матриць* ($\det F_1(\lambda) \not\equiv 0$). Визначаючи праві пари цієї матричної функції, використовуємо *канонічну форму Веєрштрасса* в'язки $F_1(\lambda)$ [21]:

$$P(A - \lambda B)Q \equiv \left[\begin{array}{c|c} J - \lambda I_l & 0 \\ \hline 0 & I_{n-l} - \lambda N \end{array}\right], \tag{1.80}$$

де P і Q — невироджені матриці, $\sigma(J) = \sigma_0(F)$, N — нільпотентна матриця, елементи верхньої наддіагоналі якої дорівнюють 0 або 1, а інші елементи нульові. Множину *скінченних елементарних дільників* в'язки $F_1(\lambda)$ формують елементарні дільники матриці J.

Індекс нільпотентності ν матриці N визначає максимальний степінь *нескінченних елементарних дільників* $F_1(\lambda)$. Поклавши

$$U = J, \quad T = Q \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(\lambda) = -F_0(\lambda)P^{-1} \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix},$$

за умов (1.79) і (1.80) маємо праву власну пару (U, T) матричної функції $F(\lambda)$. При цьому $E_h = T$, $h = 1$, а множини $\mathcal{K}$ і $\mathcal{K}_{pq}$ в теоремах 1.16—1.18 складаються з ермітових матриць X, для яких відповідно $\mathrm{i}_-(X) = 0$ та $\mathrm{i}(X) = \{p, q, l - p - q\}$.

Для матричної функції (1.79) побудуємо рівняння (1.74) з операторами

$$\mathbf{M}_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\omega} \oint\limits_{\overline{\omega}} f(\lambda, \overline{\mu}) D_\lambda X D_\mu^* d\lambda\, d\overline{\mu}, \quad \mathbf{M}Y = \Delta Y \Delta^*, \quad (1.81)$$

де ω $(\overline{\omega})$ — простий замкнений контур, що охоплює $\sigma_0(F)$ $(\sigma_0(F^*))$. *Мультиплікативна похідна* $D_\lambda = F'(\lambda)F^{-1}(\lambda)$ матриці $F(\lambda)$ і матричний аналог *логарифмічного лишку* функції $\Delta = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} D_\lambda\, d\lambda$ щодо множини точок $\sigma_0(F)$ задовольняють співвідношення

$$\operatorname{tr} D_\lambda \equiv \chi'(\lambda)/\chi(\lambda), \quad \lambda \notin \sigma(F), \quad \operatorname{tr} \Delta = n_1 + \cdots + n_\alpha = l.$$

Тут $\chi(\lambda) = \det F(\lambda)$, n_t — кратності усіх попарно різних точок $\lambda_t \in \sigma_0(F)$, $t = \overline{1, \alpha}$. Кожне власне значення $\lambda_t \in \sigma_0(F)$ є полюсом порядку m_t матричної функції D_λ, в околі якого виконується розклад

$$D_\lambda = \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti} + S_t(\lambda),$$

де A_{ti} — сталі матриці, $S_t(\lambda)$ — аналітична в заданому околі матриця-функція. Застосовуючи ряд Тейлора для функції f в околі точок $(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)$ і теорему про лишки, маємо зображення оператора (1.81):

$$\mathbf{M}_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t, m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) A_{ti} X A_{\tau j}^*, \quad (1.82)$$

де

$$f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \overline{\lambda}_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau), \ \sum_{t=1}^{\alpha} A_{t1} = \Delta, \ \operatorname{tr} A_{ti} = \begin{cases} n_t, & i = 1, \\ 0, & i > 1. \end{cases}$$

Для функцій f з розділеними змінними використовуємо вираз

$$\mathbf{M}_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} F_p X F_q^*. \tag{1.83}$$

Тут

$$F_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega f_p(\lambda) D_\lambda d\lambda = \sum_{t,i=1}^{\alpha,m_t} \frac{d^{i-1} f_p(\lambda_t)}{d\lambda_t^{i-1}}\, A_{ti},\ \operatorname{tr} F_p = \sum_{t=1}^{\alpha} n_t f_p(\lambda_t).$$

За умов (1.79) і (1.80) матричні коефіцієнти у співвідношеннях (1.81)—(1.83) подають у вигляді (див. формулу (1.58), а також [49, с. 68—72])

$$A_{ti} = G J_{ti} H, \quad F_p = G f_p(J) H, \quad \Delta = GH, \tag{1.84}$$

де

$$G = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega F_0(\lambda) P^{-1} \begin{bmatrix} R_\lambda \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda,\ \ H = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega \left[\, R_\lambda, 0 \,\right] P F_0^{-1}(\lambda)\, d\lambda,$$

$J_{ti} = \alpha_{ti}(J)$ — компоненти матриці J з резольвентою $R_\lambda = (\lambda I_l - J)^{-1}$. При цьому m_t збігаються з геометричними кратностями власних значень $\lambda_t \in \sigma(J)$, $t = \overline{1,\alpha}$.

Таким чином, для матричних функцій, які допускають правильну факторизацію (1.79), за умови $\operatorname{rank}\Delta = l$ виконуються твердження теорем 1.16—1.18 про локалізацію підмножини спектра $\sigma_0(F) = \sigma(J) \subseteq \sigma(F)$ із $r = l$ власних значень у термінах розв'язків матричного рівняння (1.74) з операторами (1.81). При цьому множини матриць $\mathcal{K}$ і $\mathcal{K}_{pq}$ вигляду (1.73) визначає оператор $\mathbf{M}X = \Delta X \Delta^*$, а замість умови (1.75) використовується співвідношення

$$S_\lambda = HYH^* + (\lambda I_l - J)(\lambda I_l - J)^* > 0, \quad \lambda \in \sigma(J).$$

1.4 Аналоги рівняння Ляпунова для лінійних динамічних систем

Дескрипторні системи. Об'єктами дослідження багатьох прикладних задач є неперервні й дискретні *дескрипторні* системи:

$$B\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \ge 0; \tag{1.85}$$

$$Bx_{t+1} = Ax_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{1.86}$$

де A і B — матриці регулярної в'язки $F(\lambda) = A - \lambda B$ розміру $n \times n$, спектр $\sigma(F)$ якої складається з l власних значень, враховуючи кратності, x_0 — початковий вектор. Побудова розв'язків таких систем й аналіз стійкості можна проводити з огляду на теорію канонічних форм матричних в'язок, а також використовуючи узагальнені обернені матриці (див., наприклад, [18, 21]).

Умови стійкості системи (1.85) визначає розміщення спектра $\sigma(F)$ відносно уявної осі. Число $\varepsilon = \min\limits_{\lambda \in \sigma(F)} (-\mathrm{Re}\lambda)$ характеризує спектральний *запас стійкості* системи (1.85). Систему (1.85) називають *α-стійкою*, якщо її спектр розміщений у відкритій півплощині $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$, при цьому $\varepsilon > \alpha \geq 0$. Аналогічно, величина $\varepsilon = \min\limits_{\lambda \in \sigma(F)} (1 - |\lambda|)$ визначає спектральный запас стійкості системи (1.86) відносно одиничного круга. Система (1.86) називається *β-стійкою*, якщо її спектр розміщений всередині круга $|\lambda| < \beta$, де $\varepsilon > 1 - \beta \geq 0$.

Якщо B — невироджена матриця, то $l = n$. У цьому випадку системи (1.85) і (1.86) зводяться до форми Коші обертанням матриці B. Якщо матриця B вироджена, то

$$l = n - \sum_{i=1}^{\tau} \nu_i = \mathrm{rank}\, B - \sum_{i=1}^{\tau} \nu_i + \tau, \tag{1.87}$$

де $\nu_1, \ldots, \nu_\tau$ — степені нескінченних елементарних дільників в'язки матриць $F(\lambda)$. Ця рівність випливає із канонічної форми (1.80) регулярної в'язки матриць. Число (1.87) визначає розмірність деякого підпростору, якому належать початкові вектори і траєкторії систем (1.85) і (1.86). Далі будемо використовувати характеристику

$$\nu = \begin{cases} 0, & \det B \neq 0, \\ \max\limits_{1 \leq i \leq \tau} \nu_i, & \det B = 0. \end{cases} \tag{1.88}$$

Асимптотично стійкі дескрипторні системи (1.85) і (1.86) з характеристикою $\nu \leq 1$ називають *допустимими*.

Побудова аналогів рівняння Ляпунова вигляду (1.74) для систем (1.85) і (1.86) і застосування теорем 1.16 – 1.18 про локалізацію спектра в загальному випадку базуються на обчисленні правих або лівих пар (U, T) в'язки матриць $F(\lambda)$, які визначаються відповідними рівняннями

$$AT = BTU, \quad TA = UTB. \tag{1.89}$$

При цьому $h = 1$ і $E_h = T$.

Якщо $Z \neq 0$ — нетривіальний розв'язок системи рівнянь

$$AZB = BZA, \quad Z = ZBZ, \tag{1.90}$$

то виконуються співвідношення

$$AZ = BZAZ, \quad ZA = ZAZB, \tag{1.91}$$

тобто (AZ, Z) і (ZA, Z) — відповідно права і ліва пари в'язки матриць $F(\lambda)$. Тому ненульові розв'язки Z кожного рівняння (1.91), зокрема системи (1.90), визначають підмножини спектра $\sigma_0(F)$, для яких можна застосувати теореми локалізації 1.16—1.18. При цьому системи співвідношень

$$\sum_{p,q} \gamma_{pq} Z f_p(AZ) X f_q(AZ)^* Z^* = ZYZ^*, \quad AZ = BZAZ, \tag{1.92}$$

$$\sum_{p,q} \gamma_{pq} f_p(ZA) ZXZ^* f_q(ZA)^* = ZYZ^*, \quad ZA = ZAZB, \tag{1.93}$$

можуть відігравати роль аналогів рівняння Ляпунова для класів систем (1.85), (1.86) і функцій (1.55).

Згідно з (1.80) загальний розв'язок системи (1.90) визначають співвідношення

$$Z = Q \begin{bmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, \quad JZ_0 = Z_0 J, \quad Z_0 = Z_0^2, \tag{1.94}$$

де Z_0 — довільний *проєктор матриці* J. При цьому, якщо $r \neq 0$ — ранг матриці Z_0, то для деякої невиродженої матриці S виконуються співвідношення

$$Z_0 = S^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad SJS^{-1} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix}. \tag{1.95}$$

Тут $J_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$. Звідси випливає, що система рівнянь (1.90) має непусту множину розв'язків рангу r тоді і лише тоді, коли r є сума порядків жорданових блоків матриці J, що відповідають деякому набору елементарних дільників в'язки $F(\lambda)$. У випадку $S = I_l$ матрицю Z в (1.94) можна подати в інтегральній формі:

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega}(A-\lambda B)^{-1}d\lambda, \quad \operatorname{rank} Z = r,$$

де контур ω охоплює деяку частину спектра $\sigma_0(F)$ з r власних значень, враховуючи кратності. Якщо $\sigma_0(F)$ — увесь спектр, то у цьому випадку маємо розв'язок системи (1.90) максимального рангу, що дорівнює загальній кількості власних значень l в'язки $F(\lambda)$.

Якщо Z — розв'язок системи (1.90) рангу r, то згідно з (1.94) і (1.95) при побудові операторів (1.82) і (1.83) можна використати матриці

$$A_{ti} = \begin{cases} \alpha_{ti}(\Theta), & \alpha_{ti}(0)=0, \\ \Delta\alpha_{ti}(\Theta), & \alpha_{ti}(0)\neq 0, \end{cases} \qquad F_p = \begin{cases} f_p(\Theta), & f_p(0)=0, \\ \Delta f_p(\Theta), & f_p(0)\neq 0, \end{cases} \tag{1.96}$$

$$\Delta = BZ = G^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}G, \quad \Theta = AZ = G^{-1}\begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}G. \tag{1.97}$$

Тут

$$G = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}P, \quad \sigma(J_0) \subseteq \sigma(F).$$

При цьому визначена підмножина спектра $\sigma_0(F) = \sigma(J_0)$, а матриці (1.97) мають такі властивості:

$$\operatorname{rank}\Delta = r, \quad \Delta^2 = \Delta, \quad \Delta\Theta = \Theta\Delta = \Theta, \quad \sigma_0(F) \subseteq \sigma(\Theta). \tag{1.98}$$

Умовами типу керованості для власних значень $\lambda \in \sigma_0(F)$ є співвідношення

$$S_\lambda = \Delta Y \Delta^* + \Delta(\lambda I_n - \Theta)(\lambda I_n - \Theta)\Delta^* \geq 0, \ \operatorname{rank} S_\lambda = r. \tag{1.99}$$

Якщо $Y > 0$, то ці співвідношення виконуються за довільних $\lambda \in \mathbb{C}$.

Отже, якщо оператори (1.82) і (1.83) побудовано за допомогою співвідношень (1.96) і (1.97) для ненульового розв'язку Z системи (1.90) рангу r, а множини матриць $\mathcal{K}$ і $\mathcal{K}_{pq}$ вигляду (1.73) визначає оператор $\mathbf{M}X = \Delta X \Delta^*$, то за умов (1.99) розміщення підмножини спектра $\sigma_0(F)$ в'язки матриць $F(\lambda)$ з r власних значень відносно множин Λ_f^+, Λ_f^- і Λ_f^0 можна описати за допомогою теорем 1.16—1.18. При цьому система співвідношень (1.74) і (1.90) є аналогом рівняння Ляпунова для дескрипторних систем (1.85) і (1.86).

Зазначимо, що кожному розв'язку Z системи (1.90) рангу $r \neq 0$ відповідає підмножина спектра $\sigma_0(F) = \sigma(J_0)$, яка збігається зі спектром матриці $\Theta_0 = R^*AL$, де L і R^* — множники *скелетного розкладу* $Z = LR^*$ $(L, R \in C^{n\times r})$.

Матриці A_{ti} в (1.96) попарно комутують і задовольняють співвідношення

$$A_{t1}^2 = A_{t1}, \quad \sum_{t=1}^{\alpha} A_{t1} = \Delta, \quad A_{t1}A_{ti} = A_{ti}A_{t1} = A_{ti},$$

$$A_{ti}A_{\tau j} = 0 \quad (t \neq \tau), \quad A_{ti} = \frac{1}{(i-1)!}(\Theta - \lambda_t \Delta)^{i-1} A_{t1}.$$

Для наближеного обчислення матриць Δ і Θ можна використати *лоранівський розклад* мультиплікативної похідної

$$D_\lambda = \lambda^{\nu-2}K^{\nu-1} + \cdots + \lambda K^2 + K + \frac{1}{\lambda}\Delta + \frac{1}{\lambda^2}\Theta + \frac{1}{\lambda^3}\Theta^2 + \cdots,$$

що випливає із співвідношень

$$D_\lambda = -B(A-\lambda B)^{-1} = -P^{-1}\left[\begin{array}{c|c} (J-\lambda I_l)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & N(I_{n-l}-\lambda N)^{-1} \end{array}\right] P,$$

$$(J-\lambda I)^{-1} = -\sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda-\lambda_t)^i} J_{ti}, \quad (I_{n-l} - \lambda N)^{-1} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda^i N^i,$$

де K і N — нільпотентні матриці.

Наведемо алгебричні та спектральні властивості операторів типу (1.82) і (1.83) у випадку регулярної в'язки матриць $F(\lambda)$:

$$\mathbf{M}_{f_1}\mathbf{M}_{f_2} = \mathbf{M}_{f_2}\mathbf{M}_{f_1} = \mathbf{M}_{f_1 f_2}, \quad c_1\mathbf{M}_{f_1} + c_2\mathbf{M}_{f_2} = \mathbf{M}_{c_1 f_1 + c_2 f_2},$$

$$\mathbf{M}g\left(\mathbf{M}_{f_1},\ldots,\mathbf{M}_{f_s}\right)=\mathbf{M}_{g(f_1,\ldots,f_s)},$$

$$\mathbf{M}_f W_{t\tau}=f(\lambda_t,\overline{\lambda}_\tau)W_{t\tau},\quad W_{t\tau}=A_{tm_t}C_{t\tau}A^*_{\tau m_\tau}\neq 0.$$

Тут c_1 і c_2 — довільні сталі, $g, f_1, \ldots, f_s$ — ермітові функції, $C_{t\tau}$ — деякі матриці. Якщо w — власне значення оператора $\mathbf{M}_f$ кратності q, то або $w=f(\lambda_t,\overline{\lambda}_\tau)$ і $q\geq n_t n_\tau$, або $w=0$ і $q\geq n^2-r^2$. Застосовуючи властивості матричних коефіцієнтів A_{ti}, можна отримати загальне подання власних елементів оператора $\mathbf{M}_f$ (див. [49, с. 20—24]).

Наведемо деякі спектральні властивості в'язки матриць $F(\lambda)=A-\lambda B$ і мови асимптотичної стійкості систем (1.85) і (1.86), використовуючи співвідношення

$$\gamma_{00}BXB^*+\gamma_{10}AXB^*+\gamma_{01}BXA^*+\gamma_{11}AXA^*=Y, \tag{1.100}$$

$$\operatorname{rank}\left[\,F(\lambda),Y\,\right]\equiv n,\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{1.101}$$

$$\operatorname{rank}\left(BXB^*\right)=l. \tag{1.102}$$

Позначимо через l_+, l_- і l_0 кількості точок спектра $\sigma(F)$, що належать відповідним множинам Λ_f^+, Λ_f^- і Λ_f^0 вигляду (1.52)—(1.54), визначених ермітовою функцією $f(\lambda,\overline{\lambda})=\gamma_{00}+\gamma_{10}\lambda+\gamma_{01}\overline{\lambda}+\gamma_{11}\lambda\overline{\lambda}$. Як Λ_f^0 може бути деяка пряма або коло з центром у точці $\gamma=-\gamma_{01}/\gamma_{11}$, що відділяє області $\Lambda_f^\pm$.

Лема 1.12 *Якщо матриці $X=X^*$ і $Y=Y^*\geq 0$ задовольняють співвідношення* (1.100) *і* (1.101), *то $l_0=0$ і*

$$l_+\leq \mathrm{i}_+(BXB^*),\quad l_-\leq \mathrm{i}_-(BXB^*). \tag{1.103}$$

При цьому рівності в (1.103) *досягаються тоді і лише тоді, коли виконується умова* (1.102). *За умови $l_0=0$ існують матриці $X=X^*$ і $Y=Y^*\geq 0$, що задовольняють співвідношення* (1.100)—(1.102).

Твердження леми 1.12 встановлюються на базі канонічної форми в'язки матриць (1.80) і теореми інерції, умовам якої відповідає функція f.

Зауваження 1.1 Якщо права частина рівняння (1.100) має вигляд
$$Y = BHB^*, \quad H > 0, \tag{1.104}$$
то виконується тотожність (1.101). При цьому його розв'язок X задовольняє умову (1.102) у кожному з випадків: 1) $\nu \leq 1$; 2) $\gamma_{11} = 0$, $\nu \leq 2$; 3) $\gamma_{11} \neq 0$, $\nu \leq 2$, $\gamma \notin \sigma(F)$, де $\gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11}$, а число ν визначено в (1.88). За умов
$$f(\lambda, \overline{\mu}) \neq 0, \quad \lambda, \mu \in \sigma(F), \tag{1.105}$$
рівняння (1.100) має розв'язок для для довільної матриці вигляду (1.104) у кожному з випадків: 1) $\nu \leq 1$; 2) $\gamma_{11} = 0, \nu \leq 2$; 3) $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma \notin \sigma(F)$; 4) $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma \in \sigma(F)$, $\zeta_\gamma = \xi_\gamma$, де $\zeta_\gamma(\xi_\gamma)$ — алгебрична (геометрична) кратність точки спектра $\gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11} \in \sigma(F)$. Якщо $\gamma_{11} = 0$, то для довільної матриці (1.104) рівняння (1.100) має розв'язок X тоді і лише тоді, коли виконуються умови (1.105) і $\nu \leq 2$.

Сформулюємо умови включення $\sigma(F) \subset \Lambda_f^+$ у термінах ЛМН.

Лема 1.13 *Нехай існують ермітові матриці X і Y, що задовольняють співвідношення*
$$\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{11}AXA^* \geq BYB^*, \tag{1.106}$$
$$BXB^* \geq 0, \quad Y > 0. \tag{1.107}$$
Тоді $\sigma(F) \subset \Lambda_f^+$. При цьому у випадку $\gamma_{11} = 0$ ($\gamma_{11} < 0$) необхідно $\nu \leq 2$ ($\nu \leq 1$). Навпаки, якщо $\sigma(F) \subset \Lambda_f^+$ і або $\gamma_{11} = 0$ і $\nu \leq 2$, або $\gamma_{11} < 0$ і $\nu \leq 1$, то система матричних нерівностей (1.106) *і* (1.107) *сумісна.*

Лема 1.14 *Нехай співвідношення* (1.100) *і* (1.101) *задовольняють ермітові матриці*
$$X = T\widehat{X}T^*, \quad Y = BT\widehat{Y}T^*B^* \geq 0, \tag{1.108}$$
де T — довільна ненульова $n \times m$-матриця, для якої
$$\operatorname{rank}\left[\, AT, BT \,\right] = \operatorname{rank}(BT). \tag{1.109}$$

Тоді $l_0 = 0$ *і виконуються рівності*

$$l_+ = \mathrm{i}_+(X), \quad l_- = \mathrm{i}_-(X). \tag{1.110}$$

За умови $l_0 = 0$ *існують ермітові матриці* X *і* Y *вигляду* (1.108), *що задовольняють співвідношення* (1.100)—(1.102) *і* (1.110).

Зауваження 1.2 Рівність (1.109) означає, що існує матриця U, для якої $AT = BTU$. Тому матриці T, X і Y в лемі 1.14 мають таку структуру:

$$T = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \; X = Q \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^*, \; Y = P^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1*},$$

де $X_1 = R\widehat{X}R^*$, $Y_1 = R\widehat{Y}R^*$, $JR = RU$, $R \in \mathbb{C}^{l\times m}$, $\operatorname{rank} R = \operatorname{rank} T = l \leq m$. Крім того, $\sigma(F) \subset \sigma(U)$, якщо

$$\operatorname{rank} \left[\, F(\lambda), BT \,\right] \equiv n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.111}$$

Для матриць Y вигляду (1.108) із (1.101) випливає (1.111), причому у випадку $\widehat{Y} > 0$ умови (1.101) і (1.111) еквівалентні.

Зауваження 1.3 Умови існування матриць X і Y, що задовольняють рівняння (1.100) і мають структуру (1.108), залежать лише від спектра $\sigma(F)$ і не пов'язані з властивостями нескінченних елементарних дільників в'язки $F(\lambda)$. Якщо $\nu \leq 3$, то, визначаючи матрицю T у лемі 1.14, замість умови (1.109) можна використати лінійне рівняння $AT = BS$ щодо T і S. При цьому лема 1.14 буде виконуватись у кожному з випадків:
1) $\nu \leq 2$; 2) $\nu = 3, \gamma_{11} = 0$; 3) $\nu = 3, \gamma_{11} \neq 0, \gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11} \notin \sigma(F)$.

Теорема 1.19 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *диференціальна система* (1.85) α*-стійка;*

2) *існують матриці* $X = X^*$ *і* $Y = Y^* \geq 0$*, що задовольняють співвідношення*

$$-2\alpha BXB^* - AXB^* - BXA^* = Y, \tag{1.112}$$

$$BXB^* \geq 0, \quad \operatorname{rank}\left[\, F(\lambda), Y \,\right] \equiv n \;\; (\operatorname{Re}\lambda \geq -\alpha); \tag{1.113}$$

3) *для довільної матриці вигляду* $Y = BT\widehat{Y}T^*B^* \geq 0$ *за умов* (1.109) *і* $\widehat{Y} > 0$ *рівняння* (1.112) *має розв'язок* $X = T\widehat{X}T^* \geq 0$.

Теорема 1.20 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *дискретна система* (1.86) β*-стійка;*

2) *існують матриці* $X = X^*$ *і* $Y = Y^* \geq 0$*, що задовольняють співвідношення*

$$\beta^2 BXB^* - AXA^* = Y, \tag{1.114}$$

$$BXB^* \geq 0, \quad \operatorname{rank}\big[\, F(\lambda), Y \,\big] \equiv n \ \ (|\lambda| \geq \beta); \tag{1.115}$$

3) *для довільної матриці вигляду* $Y = BT\widehat{Y}T^*B^* \geq 0$ *за умов* (1.109) *і* $\widehat{Y} > 0$ *рівняння* (1.114) *має розв'язок* $X = T\widehat{X}T^* \geq 0$*.*

Матричні рівняння (1.112) і (1.114) можна використовувати під час побудови квадратичних функцій Ляпунова для систем (1.85) і (1.86) вигляду

$$v(x) = x^*B^*XBx. \tag{1.116}$$

Якщо матриці $X = X^*$ і $Y = B^*\widetilde{Y}B$ при $\widetilde{Y} > 0$ задовольняють співвідношення (1.112) і $B^*XB \geq 0$, то система (1.85) α-стійка, а функція (1.116) і її похідна на нетривіальних розв'язках цієї системи задовольняють нерівності

$$v(x) > 0, \quad \frac{dv(x)}{dt} = -x^*\left(B^*YB + 2\alpha B^*XB\right)x < 0.$$

Аналогічно, якщо матриці $X = X^*$ і $Y = B^*\widetilde{Y}B$ при $\widetilde{Y} > 0$ задовольняють співвідношення (1.114) і $B^*XB \geq 0$, то система (1.86) β-стійка, а функція (1.116) і її різниця на нетривіальних розв'язках системи задовольняють нерівності

$$v(x_t) > 0, \quad v(x_{t+1}) - v(x_t) = -{x_t}^*B^*\left[\, Y + (1-\beta^2)X \,\right]Bx_t < 0,$$

де $t = 0, 1, \ldots$

Функції Ляпунова для асимптотично стійких систем (1.85) і (1.86) завжди можна побудувати у вигляді (1.116), поклавши в (1.112) і (1.114)

$$X = Z^*\widehat{X}Z \geq 0, \quad Y = B^*Z^*\widehat{Y}ZB \geq 0,$$

де $\widehat{Y} > 0$, а Z — розв'язок максимального рангу l матричної системи (1.90). Умови асимптотичної стійкості цих систем описуються також в термінах матриць:

$$X = E^* \widehat{X} E \geq 0, \quad Y = B^* E^* \widehat{Y} E B \geq 0,$$

що задовольняють рівняння (1.112) і (1.114), де $\widehat{Y} > 0$, $E = (BZ)^k$, $k \geq \nu$. При цьому Z може бути розв'язком лінійного рівняння $AZB = BZA$, зокрема $Z = F^{-1}(z)$, де $z \notin \sigma(F)$ — довільне число.

Лінійні динамічні системи. Побудуємо аналоги рівняння Ляпунова для класу динамічних систем

$$F(\mathbf{D})\, x(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.117}$$

де $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s$ — регулярний матричний поліном розміру $n \times n$ і степеня s, $\mathbf{D}$ — оператор диференціювання або зміщення по t. Важливими для застосувань підкласами систем типу (1.117) є диференціальні та різницеві системи 2-го порядку:

$$A_2\, \ddot{x} + A_1\, \dot{x} + A_0\, x = 0, \tag{1.118}$$

$$A_2\, x_{t+2} + A_1\, x_{t+1} + A_0\, x_t = 0, \quad t = 0, 1, \ldots\, , \tag{1.119}$$

які відповідають квадратичній в'язці матриць $F(\lambda)$.

Співвідношення, що визначають праві та ліві пари (U, T) матричного полінома $F(\lambda)$, мають вигляд

$$A_0 T + A_1 T U + \cdots + A_s T U^s = 0, \tag{1.120}$$

$$T A_0 + U T A_1 + \cdots + U^s T A_s = 0. \tag{1.121}$$

При цьому матричними функціями $\Phi(\lambda)$ є відповідні вирази

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} A_j T U^{j-i}, \quad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} U^{j-i} T A_j.$$

Введемо блокові матриці розміру $ns \times ns$:

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s-1} & 0 & \cdots & I \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{s-1} & A_s \\ I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_s & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_s \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_s & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Усі скалярні спектральні характеристики (власні значення, скінченні та нескінченні елементарні дільники) супроводжувальних в'язок матриць $L_1(\lambda) = A - \lambda B$ і $L_2(\lambda) = A - \lambda C$ збігаються і повністю визначають відповідні спектральні характеристики матричного полінома $F(\lambda)$.

Лема 1.15 (U, T) *— права пара матричного полінома $F(\lambda)$ індексу спостережуваності r тоді і лише тоді, коли*

$$AE_s = CE_sU, \quad E_s = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} E_s = r. \tag{1.122}$$

Аналогічно, (U, T) — ліва пара матричного полінома $F(\lambda)$ індексу керованості r тоді і лише тоді, коли

$$E_sA = UE_sB, \;\; E_s = \left[T, UT, \ldots, U^{s-1}T\right], \;\; \operatorname{rank} E_s = r. \tag{1.123}$$

Це твердження описує зв'язок між правими (лівими) парами матричного полінома та його супроводжувальної в'язки $L_2(\lambda)$ $(L_1(\lambda))$. Крім того, з співвідношень $AS_1 = S_1A = S_3$, $BS_1 = S_1C = S_2$ і (1.122) ((1.123)) випливає рівність $AZ = BZU$ $(ZA = UZC)$ при $Z = S_1E_s$ $(Z = E_sS_1)$, що визначає праву (ліву) пару в'язки матриць $L_1(\lambda)$ $(L_2(\lambda))$.

Праві та ліві пари матричного полінома $F(\lambda)$ можна визначити, розв'язуючи щодо Z одну із систем:

$$AZB = BZA, \quad Z = ZBZ; \tag{1.124}$$

$$AZC = CZA, \quad Z = ZCZ. \tag{1.125}$$

При цьому виконуються рівності $AZ = BZU$ і $ZA = UZC$, якщо відповідно $U = AZ$ і $U = ZA$. Використовуючи блокову структуру матриць A, B і C, можна показати, що знаходження матриці Z в (1.124) або (1.125) зводиться до розв'язування системи $2s$ матричних рівнянь щодо $T_1, \dots, T_s$ [47]:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=p+1}^{s}(A_iT_{i+j-p}A_j - A_jT_{i+j-p}A_i) = 0, \quad p = \overline{0, s-1}, \\ &T_q = \sum_{i=q}^{s}\sum_{j=i}^{s}T_iA_jT_{q+j-i} - \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=-1}^{i-1}T_iA_jT_{q+j-i}, \quad q = \overline{1, s}, \end{aligned} \tag{1.126}$$

де $T_0 = A_{-1} = 0$. Наприклад, розв'язок системи (1.124) має таку структуру:

$$Z = \left[\begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & \cdots & T_s \\ \hline G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{s-11} & G_{s-12} & \cdots & G_{s-1s} \end{array}\right], \tag{1.127}$$

де

$$G_{pq} = -\sum_{j=0}^{p}A_jT_{q-p+j} \ \ (p < q), \quad G_{pq} = \sum_{j=p+1}^{s}A_jT_{q-p+j} \ \ (p \geq q).$$

Аналогічно, розв'язок $T_1, \dots, T_s$ системи (1.126) формує перший блоковий стовпчик матриці Z, що задовольняє рівності (1.125).

Лема 1.16 *Нехай $T_1, \dots, T_s$ — розв'язок матричної системи* (1.126). *Тоді матриці*

$$T = [\,T_1, \dots, T_s\,], \ \ U = \|U_{pq}\|_1^s, \ \ U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{p-1}A_iT_{q-p+i+1}, & p \leq q, \\ \sum\limits_{i=p}^{s}A_iT_{q-p+i+1}, & p > q, \end{cases}$$

утворюють праву пару (U,T), *а матриці*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_s \end{bmatrix}, \quad U = \|U_{pq}\|_1^s, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{q-1} T_{p-q+i+1}A_i, & p \geq q, \\ \sum\limits_{i=q}^{s} T_{p-q+i+1}A_i, & p < q, \end{cases}$$

ліву пару (U,T) *матричного полінома* $F(\lambda)$.

Побудуємо блокові матриці $\Delta = BZ$ і $\Theta = AZ$ вигляду

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{s1} & \cdots & \Delta_{ss} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \cdots & \Theta_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{s1} & \cdots & \Theta_{ss} \end{bmatrix}. \tag{1.128}$$

Тут

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j}, \ p < q, \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j}, \quad p \geq q, \end{cases} \quad \Theta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j+1}, \ p \leq q, \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j+1}, \quad p > q. \end{cases}$$

У разі квадратичного пучка матриць $F(\lambda)$ при $s = 2$ матриці (1.128) є такими:

$$\begin{gathered} \Delta = BZ = \left[\begin{array}{c|c} A_1T_1 + A_2T_2 & -A_0T_1 \\ \hline A_2T_1 & A_2T_2 \end{array}\right], \\ \Theta = AZ = \left[\begin{array}{c|c} -A_0T_1 & -A_0T_2 \\ \hline A_2T_2 & -A_0T_1 - A_1T_2 \end{array}\right], \end{gathered} \tag{1.129}$$

де T_1 и T_2 — розв'язок системи чотирьох матричних рівнянь:

$$\begin{gathered} A_0T_1A_1 - A_1T_1A_0 = A_2T_2A_0 - A_0T_2A_2, \\ A_0T_1A_2 - A_2T_1A_0 = A_2T_2A_1 - A_1T_2A_2, \\ T_1 = T_1A_1T_1 + T_1A_2T_2 + T_2A_2T_1, \\ T_2 = T_2A_2T_2 - T_1A_0T_1. \end{gathered} \tag{1.130}$$

Лема 1.17 *Нехай* $T_1, \dots, T_s$ *— нетривіальний розв'язок системи* (1.126) *і* $\operatorname{rank} \Delta = r \geq 1$. *Тоді* Δ *є проєктором матриці* Θ *і, принаймні,* r *власних значень матриці* Θ *з урахуванням кратностей утворюють підмножину спектра* $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$ *матричного полінома* $F(\lambda)$. *При цьому, якщо* $\lambda \in \sigma(\Theta)$, *то або* $\lambda \in \sigma_0(F)$, *або* $\lambda = 0$.

Це твердження встановлюється за допомогою зображення матриць (1.128) у вигляді (1.97) на розв'язках Z системи (1.124). При цьому виконуються співвідношення (1.98) і визначається підмножина спектра $\sigma_0(F)$ матричного полінома $F(\lambda)$, що збігається з $\sigma(J_0)$, а також з $\sigma(R^*AL)$, де L і R^* — множники скелетного розкладу $Z = LR^*$.

Отже, якщо оператори (1.82) і (1.83) визначені за допомогою співвідношень (1.96) і (1.128) для нетривіального розв'язку $T_1, \dots, T_s$ системи (1.126), а множини матриць $\mathcal{K}$ і $\mathcal{K}_{pq}$ вигляду (1.73) визначає оператор $\mathbf{M}X = \Delta X \Delta^*$, то за умов (1.99) розташування підмножини спектра $\sigma_0(F)$ матричного полінома $F(\lambda)$, що складається з $r = \operatorname{rank} \Delta$ власних значень, щодо заданих множин Λ_f^+, Λ_f^- і Λ_f^0 можна описати за допомогою теорем 1.16—1.18. При цьому система матричних співвідношень (1.74) і (1.126) є аналогом рівняння Ляпунова для класу динамічних систем (1.117).

Зауваження 1.4 Будуючи праві та ліві пари матричного полінома, можна використовувати лише лінійні рівняння в (1.124)—(1.126). Так, за допомогою (1.80) можна встановити, що якщо $AZB = BZA$, то для деякої матриці U пара (U, T), де $T = (ZB)^k$, $k \geq \nu$, задовольняє рівність $TA = UTB$. Якщо при цьому $\operatorname{rank} Z = \operatorname{rank}(BZ)$, то роль T може відігравати також матриця Z.

Наведемо ще один підхід до побудови аналогів рівняння Ляпунова для систем типу (1.117), базований на обчисленні перших s інтегралів:

$$H_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} \lambda^{p-1} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad p = 1, 2, \dots, \tag{1.131}$$

де ω — замкнений контур, що відокремлює підмножину спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$. Застосовуючи формулу Фробеніуса для обернення супроводжувальної в'язки матриць $L_1(\lambda) = A - \lambda B$ при $\lambda \notin \sigma(F)$, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} -L_1^{-1}(\lambda) &= S_1 W(\lambda) + F_1(\lambda), \\ L_1'(\lambda) L_1^{-1}(\lambda) &= S_2 W(\lambda) + F_2(\lambda), \\ \lambda L_1'(\lambda) L_1^{-1}(\lambda) &= S_3 W(\lambda) + F_3(\lambda). \end{aligned} \tag{1.132}$$

Тут

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} F^{-1}(\lambda) & \lambda F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{s-1} F^{-1}(\lambda) \\ \lambda F^{-1}(\lambda) & \lambda^2 F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^s F^{-1}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{s-1} F^{-1}(\lambda) & \lambda^s F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{2s-2} F^{-1}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$F_1(\lambda), F_2(\lambda), F_3(\lambda)$ — деякі поліноміальні матриці. Інтегруючи рівності (1.132) за замкненим контуром ω, маємо

$$Z = S_1 H, \quad \Delta = BZ = S_2 H, \quad \Theta = AZ = S_3 H, \tag{1.133}$$

де

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_s \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_s & H_{s+1} & \cdots & H_{2s-1} \end{bmatrix}.$$

Інтеграли (1.131) задовольняють систему співвідношень

$$\begin{gathered} A_0 H_1 + A_1 H_2 + \cdots + A_s H_{s+1} = 0, \\ A_0 H_2 + A_1 H_3 + \cdots + A_s H_{s+2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0 H_p + A_1 H_{p+1} + \cdots + A_s H_{s+p} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Звідси випливає, що блоки матриці Z мають вигляд

$$Z_{pq} = \begin{cases} \sum\limits_{j=p}^{s} A_j H_{j+q-p+1}, & q < p, \\ H_q, & p = 1, \\ -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j H_{j+q-p+1}, & q \geq p > 1, \end{cases} \tag{1.134}$$

і всі матриці (1.133) виражаються через $H_1, \ldots, H_s$.

Якщо контур ω охоплює весь спектр $\sigma(F)$, то матриці H_p збігаються з коефіцієнтами головної частини лоранівського розкладу резольвенти в околі нескінченно віддаленої точки

$$F^{-1}(\lambda) = H_0(\lambda) + \frac{1}{\lambda} H_1 + \frac{1}{\lambda^2} H_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda^s} H_s + \cdots \tag{1.135}$$

Матриці Δ і Θ в (1.133) задовольняють співвідношення (1.97) при $S = I_l$, а також (1.98). Порівнюючи (1.134) з відповідними блоками розв'язку (1.127) системи (1.124), отримаємо таке твердження.

Лема 1.18 *Матричну систему* (1.126) *задовольняє сім'я інтегралів*

$$T_p = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda^{p-1} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad p = \overline{1, s}, \tag{1.136}$$

де ω — замкнений контур, що відокремлює будь-яку підмножину спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$. При цьому, якщо $\sigma_0(F) = \sigma(F)$, то в лемі 1.16 (U, T) — *права (ліва) пара матричного полінома $F(\lambda)$, для якої виконується відповідна умова* (1.72) *і $\sigma(F) \subseteq \sigma(U)$.*

Отже, твердження теорем 1.16—1.18 можна сформулювати в термінах розв'язків аналогів рівняння Ляпунова для матричного полінома $F(\lambda)$, побудованих за допомогою s інтегралів (1.136).

1.5 Матричні нерівності з невизначеними коефіцієнтами

Розглянемо лінійний оператор у просторі матриць:

$$\mathbf{M}(p) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_m, \quad \mathbf{M}(p)X = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} A_i(p_i) X A_j(p_j)^*, \tag{1.137}$$

де γ_{ij} — скалярні коефіцієнти, що утворюють ермітову матрицю $\Gamma \in \mathcal{H}_\nu$, а значення матричних коефіцієнтів $A_i = A_i(p_i)$, що залежать від векторних параметрів

$$p_i = \big[\, p_{i1}, \dots, p_{i\nu_i} \,\big]^\top \in \mathcal{P}_{\nu_i} \triangleq \Big\{ q \in \mathbb{R}^{\nu_i} : \ q_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{\nu_i} q_k = 1 \Big\},$$

утворюють сім'ю політопів:

$$\mathcal{A}_i = \mathrm{Co}\big\{ A_{i1}, \dots, A_{i\nu_i} \big\} = \Big\{ A \in \mathbb{C}^{m \times n} : \ A = \sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik} A_{ik}, \ \ p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i} \Big\}.$$

Загальний вектор параметрів $p = [p_1^\top, ..., p_\nu^\top]^\top \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\nu_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\nu_\nu}$ має порядок $\alpha = \nu_1 + \cdots + \nu_\nu$. Множина операторів (1.137), що відповідає всім можливим комбінаціям вершин A_{ir_i} політопів $\mathcal{A}_i$, має вигляд

$$\mathbf{M}_{r_1 \dots r_\nu} X = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} A_{ir_i} X A_{jr_j}^*, \quad r_i \in \big\{ 1, \dots, \nu_i \big\}. \tag{1.138}$$

Якщо $\nu_i = 1$ для деякого i, то $r_i = 1$ і в (1.137) відповідний матричний коефіцієнт A_i не залежить від p_i. Виділимо підмножину індексів $J \subseteq \{1, \dots, \nu\}$, яким відповідають матричні коефіцієнти A_i, що залежать від p_i.

Лема 1.19 *Для будь-якого вектора* $p \in \mathcal{P}_\nu$ *виконується матрична нерівність* $pp^\top \leq \mathrm{diag}\big\{ p_1, \dots, p_\nu \big\}$.

Лема 1.20 *Якщо* $p \in \mathcal{P}_\nu$ *і* $A_1, \dots, A_\nu \in \mathbb{C}^{m \times n}$, *то для довільної матриці* $X \in \mathcal{H}_n$ *виконується матрична нерівність*

$$\sum_{i=1}^{\nu} p_i A_i X A_i^* \geq \Big(\sum_{i=1}^{\nu} p_i A_i \Big) X \Big(\sum_{i=1}^{\nu} p_i A_i^* \Big). \tag{1.139}$$

З (1.139), зокрема, випливає, що для будь-якої матриці $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ та будь-якого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність $x^* A X A^* x \leq \max\limits_i (x^* A_i X A_i^* x)$.

Лема 1.21 *Нехай виконується одна з умов:*

$$\gamma_{ii} = 0, \quad i \in J, \quad X = X^* \tag{1.140}$$

або

$$\gamma_{ii} \leq 0, \quad i \in J, \quad X = X^* \geq 0. \tag{1.141}$$

Тоді еквівалентними є системи матричних нерівностей

$$\mathbf{M}(p)X \geq 0\,(>0\,), \quad p \in \mathcal{P}; \tag{1.142}$$

$$\mathbf{M}_{r_1 \ldots r_\nu} X \geq 0\,(>0\,), \quad r_i \in \{1, \ldots, \nu_i\},\ i = \overline{1, \nu}. \tag{1.143}$$

Зауваження 1.5 У загальному випадку оператор (1.137) можна подати як

$$\mathbf{M}(p)X = W\big(G(p) \otimes X\big)W^*, \quad p \in \mathcal{P}, \tag{1.144}$$

де $W = \big[\, A_{11}, \ldots, A_{1\nu_1}; \ldots; A_{\nu 1}, \ldots, A_{\nu\nu_\nu} \big]$, а ермітова матриця $G(p)$ за умов $\lambda_{\min}(\Gamma) \leq 0$ і $\lambda_{\max}(\Gamma) \geq 0$ задовольняє співвідношення $\lambda_{\min}(\Gamma) D \leq G(p) = P\Gamma P^\top \leq \lambda_{\max}(\Gamma) D$, де

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_\nu \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_\nu \end{bmatrix},$$

$D_i = \mathrm{diag}\{p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}\}$, $i = \overline{1, \nu}$. При цьому маємо двосторонню оцінку оператора (1.137):

$$\lambda_{\min}(\Gamma)\mathbf{M}_0(p)X \leq \mathbf{M}(p)X \leq \lambda_{\max}(\Gamma)\mathbf{M}_0(p)X, \quad p \in \mathcal{P},$$

$$\mathbf{M}_0(p)X = W(D \otimes X)W^* = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik} A_{ik} X A_{ik}^*, \quad X = X^* \geq 0.$$

Лема 1.22 *Нехай виконуються матричні нерівності*

$$Y + A_i Z + Z^* A_i^* + A_i X A_i^* \leq 0 \ (< 0) \quad i = \overline{1, \nu}, \tag{1.145}$$

де $X = X^* \geq 0$, $Y = Y^*$, Z *і* A_i *— задані матриці відповідних розмірів. Тоді для будь-якої матриці* $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$

$$Y + AZ + Z^* A^* + AXA^* \leq 0 \ (< 0). \tag{1.146}$$

Лема 1.23 *Для будь-яких векторів* $p_r \in \mathcal{P}_{\nu_r}$ $(r = \overline{1,3})$ *виконується матрична нерівність*

$$(A + BKC)X(A + BKC)^* \leq \sum_{i=1}^{\nu_1} \sum_{j=1}^{\nu_2} \sum_{k=1}^{\nu_3} p_{1i} p_{2j} p_{3k} M_{ijk} X M_{ijk}^*,$$

де

$$A = \sum_{i=1}^{\nu_1} p_{1i} A_i, \ B = \sum_{j=1}^{\nu_2} p_{2j} B_j, \ C = \sum_{k=1}^{\nu_3} p_{3k} C_k, \ M_{ijk} = A_i + B_j K C_k,$$

$X = X^* \geq 0$, A_i, B_j, C_k *і* K *— матриці відповідних розмірів.*

Твердження лем 1.22 і 1.23 випливають із леми 1.20.

Зауваження 1.6 Відомо, що інтервальні та афінні множини матриць описуються у вигляді політопів. Наприклад, кожну матрицю $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ з інтервалу $\underline{A} \leq A \leq \overline{A}$ можна подати у вигляді

$$A = \sum_{k=1}^{\nu} p_k A_k, \quad A_k = \|a_{t\tau}^k\|_{t,\tau=1}^{m,n}, \quad p = [\,p_1, \ldots, p_\nu\,]^\top \in \mathcal{P}_\nu,$$

де $a_{t\tau}^k \in \{\underline{a}_{t\tau}, \overline{a}_{t\tau}\}$, $\underline{A} = \|\underline{a}_{t\tau}\|_{t,\tau=1}^{m,n}$, $\overline{A} = \|\overline{a}_{t\tau}\|_{t,\tau=1}^{m,n}$, $\nu = 2^{nm}$.

Можна сформулювати аналоги лем 1.20—1.23 для матричних нерівностей з інтервальною та афінною невизначеностями коефіцієнтів відповідних операторів.

1.6 Методи ЛМН у задачах локалізації спектра

Матричні функції та аналітичні області. Розглянемо регулярну матричну функцію

$$F(\lambda) = f_0(\lambda)A_0 + \cdots + f_s(\lambda)A_s, \quad \det F(\lambda) \not\equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.147)$$

де $A_0, \ldots, A_s \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — задані матриці, $f_0(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$ — скалярні функції, аналітичні в околі спектра $\sigma(F)$ і такі, що $z_s(\lambda) = \left[\, f_0(\lambda), \ldots, f_s(\lambda) \,\right] \neq 0$, $\lambda \in \sigma(F)$. Вивчимо розташування точок спектра $\sigma(F)$ щодо областей

$$\Omega = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \mathrm{i}_+(V(\lambda, \overline{\lambda})) \geq 1\right\}, \ \widehat{\Omega} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon V(\lambda, \overline{\lambda}) \leq 0\right\}. \quad (1.148)$$

Тут $V(\lambda, \overline{\lambda})$ — ермітова матричнозначна функція. Очевидно, що $\Omega \cap \widehat{\Omega} = \emptyset$ і $\Omega \cup \widehat{\Omega} = \mathbb{C}$. Введемо блокові матриці

$$A = \left[\, A_0^\top, \ldots, A_s^\top \,\right]^\top, \quad A^{\perp *} = \left[\, B_0, \ldots, B_s \,\right],$$

для яких виконуються співвідношення

$$A^{\perp *}A = 0, \quad A^+ A = I_n, \quad \det T \neq 0, \quad T = \left[\, A^{+*}, A^\perp \,\right], \quad (1.149)$$

де $A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$ — псевдообернена матриця.

Лема 1.24 *Нехай виконується одне зі співвідношень*

$$\left[\, I_{n(s+1)}, A \,\right] W \left[\, I_{n(s+1)}, A \,\right]^* > 0 \quad (1.150)$$

або

$$A^{\perp *} L A^\perp > 0, \quad (1.151)$$

де

$$W = \begin{bmatrix} L & G \\ G^* & H \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{00} & \ldots & L_{0s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{s0} & \ldots & L_{ss} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_s \end{bmatrix},$$

а матрична функція $V(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum\limits_{i,j=0}^{s} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)} L_{ij}$ *визначає області* (1.148). *Тоді* $\sigma(F) \cap \widehat{\Omega} = \emptyset$, *тобто* $\sigma(F) \subset \Omega$.

Поклавши у лемі 1.24 $L = \Gamma \otimes X$ (Γ і X — ермітові матриці відповідних розмірів $s+1 \times s+1$ і $n \times n$), отримуємо умови локалізації спектра $\sigma(F)$ в області Ω, що описується скалярною ермітовою функцією $f(\lambda, \overline{\lambda}) = z_s(\lambda)\Gamma z_s^*(\lambda)$.

Теорема 1.21 *Якщо для деяких матриць G, $H = H^*$ і $X = X^* \geq 0$ ($X \neq 0$) виконується одне зі співвідношень*

$$AG^* + GA^* + AHA^* + \Gamma \otimes X > 0 \tag{1.152}$$

або

$$\sum_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij} B_i X B_j^* > 0, \tag{1.153}$$

то всі власні значення матричної функції $F(\lambda)$ розташовані в області $\Omega = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum\limits_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij} f_i(\lambda)\overline{f_i(\lambda)} > 0\Big\}$.

Лема 1.25 *Нехай $f_0(\lambda) \neq 0$ в околі точок $\sigma(F)$ і виконується матрична нерівність*

$$[\,A^*, I_n\,]\, W\, [\,A^*, I_n\,]^* > 0. \tag{1.154}$$

Тоді $\sigma(F) \subset \Omega$, де область Ω визначається в (1.148) при

$$V(\lambda, \overline{\lambda}) = \begin{bmatrix} \Psi^*(\lambda) L \Psi(\lambda) & f_0(\lambda)\Psi^*(\lambda) G \\ \overline{f_0(\lambda)} G^* \Psi(\lambda) & f_0(\lambda)\overline{f_0(\lambda)} H \end{bmatrix},$$

$$\Psi(\lambda) = \begin{bmatrix} -f_1(\lambda) I_n & \dots & -f_s(\lambda) I_n \\ f_0(\lambda) I_n & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n\times n} & \dots & f_0(\lambda) I_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.22 *Якщо сумісна система ЛМН*

$$\sum_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij} A_i^* X A_j > 0, \quad X \geq 0, \tag{1.155}$$

то всі власні значення матричної функції $F(\lambda)$ *розташовані в області* $\Omega = \big\{\lambda \in \mathbb{C} :\, \mathrm{i}_+(\Phi^*(\lambda)\Gamma\Phi(\lambda)) \geq 1\big\}$, *де*

$$\Phi(\lambda) = \left[\frac{-z(\lambda)}{f_0(\lambda)I_s}\right], \quad z(\lambda) = \left[\, f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)\,\right].$$

Це твердження випливає з леми 1.25 при $L = \Gamma \otimes X$ та нульових G і H. Аналогічне твердження сформульовано в [49] при слабших обмеженнях (типу керованості) на вирази (1.155). Леми 1.24 та 1.25 доповнюють та узагальнюють відомі методи локалізації власних чисел матричних функцій в термінах лінійних матричних нерівностей (1.150), (1.151), (1.154) та їх окремих випадків (1.152), (1.153) і (1.155) (див. [49, с. 94—98] і [131, с. 93—97]).

Зауваження 1.7 У теоремі 1.22 область Ω описує скалярна функція $f(\lambda, \overline{\lambda}) = z_s(\lambda)\widetilde{\Gamma} z_s^*(\lambda) > 0$, якщо покласти

$$\Gamma = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & \gamma & 0_{2\times s-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{s-1\times 2}} & -Q^{-1} \end{array}\right], \ \widetilde{\Gamma} = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma & -1 & \\ -1 & 0 & 0_{2\times s-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{s-1\times 2}} & Q \end{array}\right],$$

де $Q = Q^* > 0$.

Приклад 1.1 Розглянемо матричний квазіполіном:

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau_1}A_2 + \cdots + e^{-\lambda\tau_{s-1}}A_s, \ \ \tau_i \geq 0, \ i = \overline{1, s-1}.$$

Якщо для деяких чисел γ, $q_1 > 0, \ldots, q_{s-1} > 0$ та матриці $X \geq 0$ виконується матрична нерівність

$$A_0^*XA_1 + A_1^*XA_0 + \gamma A_1^*XA_1 - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{q_i}A_{i+1}^*XA_{i+1} > 0, \qquad (1.156)$$

то за теоремою 1.22 усі точки спектра $\sigma(F)$ належать області $\Omega = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} :\, \lambda + \overline{\lambda} < \gamma + \sum\limits_{i=1}^{s-1} q_i e^{-(\lambda+\overline{\lambda})\tau_i}\Big\}$. Якщо $\gamma \leq -q_1 - \cdots - q_{s-1}$, то ця область повністю розташована в лівій півплощині. У цьому випадку маємо достатні умови стійкості квазіполінома $F(\lambda)$ у вигляді ЛМН (1.156) (див. [49, 131]). Цей результат можна використовувати, вивчаючи абсолютну стійкість лінійних систем керування із запізненням.

Матричні поліноми та алгебричні області. Розглянемо регулярний матричний поліном розміру $n \times n$:

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s, \quad \det F(\lambda) \not\equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.157}$$

та клас алгебричних областей у комплексній площині

$$\Lambda_k = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ f(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} \lambda^i \overline{\lambda}^j > 0 \Big\}, \tag{1.158}$$

де $s \geq 1$, $k \geq 1$, γ_{ij} — скалярні коефіцієнти, що формують ермітову матрицю Γ. Припускатимемо, що $\Lambda_k \neq \emptyset$ і $\Lambda_k \neq \mathbb{C}$, тобто $\mathrm{i}_{\pm}(\Gamma) \neq 0$. Очевидно, що Λ_1 — область, обмежена деякою прямою або колом. Зокрема, лівій півплощині та одиничному колу відповідають матриці

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.159}$$

Клас областей Λ_2 містить всі області, обмежені алгебричними кривими другого порядку.

Нехай $m = \max\{s, k\}$ і $r = m - k$. Побудуємо матриці

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{00} & \dots & X_{0r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{r0} & \dots & X_{rr} \end{bmatrix}$$

відповідних розмірів $n(m+1) \times n$, $n(m+1) \times n$, $n(r+1) \times n(r+1)$ і введемо лінійні оператори

$$\mathbf{L}(X) = C\,(\Gamma \otimes X)\,C^{\top}, \quad \mathbf{M}(X) = D\,(\Gamma \otimes X)\,D^{*}. \tag{1.160}$$

Тут $C = R \otimes I_n = \big[\, C_0, \dots, C_k \,\big]$, $D = A^{\perp *} C = \big[\, D_0, \dots, D_k \,\big]$,

$$R = \big[\, E, \Delta E, \dots, \Delta^k E \,\big], \ \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1\times m} & 0 \\ I_m & 0_{m\times 1} \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} I_{r+1} \\ 0_{k\times r+1} \end{bmatrix},$$

$A^{\perp *} = \big[\, B_0, \dots, B_m \,\big]$ — матриця, що визначається співвідношеннями (1.149). Блоки A_i при $i > s$ повинні бути такими, щоб спектр матричного полінома $F_m(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^m A_m$ включав у себе $\sigma(F)$. Наприклад, можна покласти $A_i = 0$, $i > s$. Якщо $k \le s$, то такі блоки A відсутні.

Нехай $\widehat{\Lambda}_k \triangleq \mathbb{C}\backslash\Lambda_k$ — замкнене доповнення області Λ_k, а $\Lambda_r(X)$– область, яка визначається ермітовою матрицею X у вигляді

$$\Lambda_r(X) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \, Z_r(\lambda) X Z_r^*(\lambda) = \sum_{i,j=0}^{r} \lambda^i \overline{\lambda}^j X_{ij} \ge 0\Big\},$$

де $Z_r(\lambda) = \big[\, I_n, \lambda I_n, \ldots, \lambda^r I_n \,\big]$.

Теорема 1.23 *Нехай для деяких матриць G, $H = H^*$ і $X = X^*$ виконуються включення*

$$\widehat{\Lambda}_k \subseteq \Lambda_r(X) \qquad (1.161)$$

та одна з матричних нерівностей

$$AG^* + GA^* + AHA^* + \mathbf{L}(X) > 0 \qquad (1.162)$$

або

$$\mathbf{M}(X) > 0. \qquad (1.163)$$

Тоді всі власні значення матричного полінома $F(\lambda)$ знаходяться в області Λ_k.

Теорема 1.23 узагальнює та розвиває відомі методи локалізації спектра матричного полінома, запропоновані в [117, 118] для класу областей Λ_1. Її сформульовано без обмежень на порядок використаних алгебричних кривих, а умова (1.161) в загальному випадку не потребує додатної визначеності розв'язків відповідних матричних нерівностей.

Доведення теореми 1.23 можна отримати у вигляді наслідку леми 1.24, поклавши $f_i(\lambda) = \lambda^i$, $i = \overline{0, m}$, причому за умови (1.161) виконується включення $\Omega \subseteq \Lambda_k$. Обмеження (1.161) на блокову матрицю X виконується для будь-якої області Λ_k в тому випадку, коли $\Lambda_r(X)$ — вся комплексна площина $\mathbb{C}$. Для цього достатньо припустити, щоб шукана матриця X була додатно (невід'ємно) λ-*визначеною*, тобто

$$Z_r(\lambda)XZ_r^*(\lambda) = \sum_{i,j=0}^{r} \lambda^i\overline{\lambda}^j X_{ij} > 0\,(\geq 0)\ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}.$$

Цю властивість має, наприклад, блокова матриця X, додатно (невід'ємно) визначена у звичайному сенсі. Якщо $k \geq s$, то $m = k$, $r = 0$ і $C = I_{n(k+1)}$. У цьому випадку в (1.162) і (1.163) використовуємо оператори $\mathbf{L}(X) = \Gamma \otimes X$ і $\mathbf{M}(X) = A^{\perp *}L(X)A^{\perp}$. При цьому невідомі матриці X і H мають розміри $n \times n$ і в теоремі 1.23 замість умови (1.161) використовуємо нерівність $X \geq 0$ $(X \neq 0)$.

Зазначимо, що якщо $\det A_0 \neq 0$, то матрицю $A^{\perp *}$, що відповідає співвідношенням (1.149), завжди можна побудувати у вигляді

$$A^{\perp *} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_1 & I_n & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{A}_m & 0_{n\times n} & \dots & I_n \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_i = \begin{cases} -A_iA_0^{-1}, & i \leq s, \\ 0_{n\times n}, & i > s. \end{cases} \tag{1.164}$$

У випадку $k = s$ структура оператора $\mathbf{M}(X)$ у (1.163) з урахуванням (1.164) є блоковою:

$$\mathbf{M}(X) = \begin{bmatrix} Y_{11}(Z) & \dots & Y_{1s}(Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{s1}(Z) & \dots & Y_{ss}(Z) \end{bmatrix}, \quad X = A_0ZA_0^*, \tag{1.165}$$

де $Y_{pq}(Z) = \gamma_{00}A_pZA_q^* - \gamma_{p0}A_0ZA_q^* - \gamma_{0q}A_pZA_0^* + \gamma_{pq}A_0ZA_0^*$, $p, q = \overline{1, s}$.

Якщо $\det A_0 = 0$, то замість $F(\lambda)$ і Λ_k можна розглядати матричний поліном $F_\alpha(\lambda) = F(\lambda + \alpha) = \sum\limits_{i=0}^{s} \lambda^i A_{\alpha i}$ і область

$$\Lambda_k^\alpha = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : f\big(\lambda + \alpha, \overline{\lambda} + \overline{\alpha}\big) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij}^\alpha \lambda^i \overline{\lambda}^j > 0\Big\},$$

де $A_{\alpha 0} = F(\alpha)$, $\det A_{\alpha 0} \neq 0$. Для регулярного матричного полінома $F(\lambda)$ число $\alpha \notin \sigma(F)$ із зазначеними властивостями існує. При цьому $\sigma(F_\alpha) = \sigma(F) - \alpha$ і $\sigma(F) \subset \Lambda_k \Longleftrightarrow \sigma(F_\alpha) \subset \Lambda_k^\alpha$.

Існують різні способи зведення спектральних задач для матричних поліномів до аналогічних задач для лінійних в'язок матриць. Наведемо метод з праці [38], що ґрунтуються на застосуванні матриць типу $A^{\perp}$, які задовольняють співвідношення (1.149). Використовуючи блочне подання $A^{\perp *} = \left[B_0, \ldots, B_s\right]$ при $m = s$, побудуємо в'язку матриць розміру $ns \times ns$:

$$D_1 - \lambda D_0 = \left[\, B_1, \ldots, B_s \,\right] - \lambda \left[\, B_0, \ldots, B_{s-1} \,\right] \tag{1.166}$$

і розглянемо такі співвідношення:

$$v^* F(\lambda) = 0, \quad v \neq 0; \tag{1.167}$$

$$u^*(D_1 - \lambda D_0) = 0, \quad u \neq 0; \tag{1.168}$$

$$u^* A^{\perp *} = v^* Z_s(\lambda), \quad v = B_0^* u \neq 0. \tag{1.169}$$

Співвідношення (1.167) і (1.168) визначають власні значення та відповідні ліві власні вектори матричного полінома (1.157), а також в'язки матриць (1.166). Легко встановити еквівалентність співвідношень (1.168) і (1.169). Проте з означення матриці $A^{\perp *}$ і подання $F(\lambda) = Z_s(\lambda) A$ випливає еквівалентність співвідношень (1.167) і (1.169) для деякого вектора $u \neq 0$. Отже, співвідношення (1.167) і (1.168) є еквівалентними. При цьому тотожне виконання однієї з рівностей (1.167) або (1.168) для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ зумовлює тотожне виконання іншої із них. Це означає, що властивості регулярності матричного полінома (1.157) і в'язки матриць (1.166) також еквівалентні.

Лема 1.26 *Множини всіх різних власних значень* λ_i *матричного полінома* (1.157) *і в'язки матриць* (1.166) *збігаються, а їхні відповідні ліві власні вектори пов'язані співвідношеннями* $v_i^* = u_i^* B_0$ $(i = \overline{1, l})$.

Сформулюємо критерії належності спектра матричного полінома $F(\lambda)$ областям класу Λ_1. У цьому випадку

$$E = \begin{bmatrix} I_s \\ 0_{1\times s} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1\times s} & 0 \\ I_s & 0_{s\times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(X) = \gamma_{00} D_0 X D_0^* + \gamma_{01} D_0 X D_1^* + \gamma_{10} D_1 X D_0^* + \gamma_{11} D_1 X D_1^*,$$

де D_0 і D_1 — матриці лінійної в'язки (1.166). Враховуючи лему 1.26 та загальні властивості додатно оборотних операторів у просторі ермітових матриць, сформулюємо таке твердження.

Теорема 1.24 *Включення $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ виконується тоді і лише тоді, коли існують ермітові матриці X і Y, що задовольняють співвідношення* 1) $\mathbf{M}(X) = Y \geq 0$, $\operatorname{rank}\left[\, D_1 - \lambda D_0, Y \,\right] \equiv ns$ $(\lambda \in \widehat{\Lambda}_1)$, $D_0 X D_0^* \geq 0$. *Якщо матриця D_0 невироджена, то це включення еквівалентне кожному з наступних тверджень:* 2) *матрична нерівність $\mathbf{M}(X) > 0$ має розв'язок $X = X^* > 0$;* 3) *для довільної матриці $Y = Y^* > 0$ матричне рівняння $\mathbf{M}(X) = Y$ має розв'язок $X = X^* > 0$;*
4) *оператор $\mathbf{M}$ додатно оборотний щодо конуса невід'ємно визначених матриць $\mathcal{K}_{ns}$.*

Доведення твердження достатності критерію 1 полягає у наступному. Якщо припустити, що деяке власне значення $\lambda \in \widehat{\Lambda}_1$, то згідно з (1.168) для відповідного лівого власного вектора u^* повинні виконуватись суперечливі співвідношення:

$$f(\lambda, \overline{\lambda}) \leq 0, \quad u^* D_0^* X D_0 u \geq 0, \quad f(\lambda, \overline{\lambda})\, u^* D_0^* X D_0 u = u^* Y u > 0.$$

За умови $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ матриці X і Y в критерії 1 завжди можна побудувати у вигляді (див. лему 1.14)

$$X = Z \widehat{X} Z^*, \quad Y = D_0 Z \widehat{Y} Z^* D_0^*, \quad \operatorname{rank}\left[\, D_1 Z, D_0 Z \,\right] = \operatorname{rank}(D_0 Z).$$

У разі невиродженої матриці D_0 критерії 2—4 випливають із теореми 1.10.

Робастна локалізація спектра. Розглянемо клас областей Λ_k вигляду (1.158) та параметричну сім'ю регулярних матричних поліномів розміру $n \times n$:

$$F(\lambda, p) = A_0(p_0) + \lambda A_1(p_1) + \cdots + \lambda^s A_s(p_s), \tag{1.170}$$

де значення матричних коефіцієнтів $A_i(p_i)$, що залежать від векторних параметрів

$$p_i = [p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}]^\top \in \mathcal{P}_{\nu_i} = \Big\{ q \in \mathbb{R}^{\nu_i} : \ q_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{\nu_i} q_k = 1 \Big\},$$

утворюють політопи $\mathcal{A}_i = \mathrm{Co}\{A_{i1}, \ldots, A_{i\nu_i}\}$, $i = \overline{0, s}$. Загальний вектор параметрів $p = [p_0^\top, \ldots, p_s^\top]^\top \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\nu_0} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\nu_s}$ має порядок $\nu = \nu_0 + \cdots + \nu_s$.

Нехай $s \geq 1$, $k \geq 1$, $m = \max\{s, k\}$ і $r = m - k$. Виділимо всі матричні поліноми, що відповідають вершинам політопів:

$$F_{t_0 \ldots t_s}(\lambda) = A_{0t_0} + \lambda A_{1t_1} + \cdots + \lambda^s A_{st_s}, \quad t_i \in \{1, \ldots, \nu_i\}, \quad i = \overline{0, s}.$$

Їхня кількість дорівнює $\nu_0 \cdots \nu_s$. Якщо $\nu_i = 1$, то $t_i = 1$ і в (1.170) відповідний матричний коефіцієнт A_i не залежить від p_i.

Теорема 1.25 *Нехай для деяких матриць G, $H = H^* \leq 0$ і $X_{t_0 \ldots t_s} = X^*_{t_0 \ldots t_s}$, $t_i \in \{1, \ldots, \nu_i\}$, виконуються умова* (1.161) *і система матричних нерівностей*

$$A_{t_0 \ldots t_s} G^* + G A^*_{t_0 \ldots t_s} + A_{t_0 \ldots t_s} H A^*_{t_0 \ldots t_s} + \mathbf{L}(X_{t_0 \ldots t_s}) > 0, \qquad (1.171)$$

де $\mathbf{L}$ *— лінійний оператор, визначений в* (1.160),

$$A_{t_0 \ldots t_s} = \left[A_0^\top, \ldots, A_m^\top\right]^\top, \quad A_i = \begin{cases} A_{it_i}, & i \leq s \\ 0, & i > s \end{cases}, \quad i = \overline{0, m}.$$

Тоді для будь-якого $p \in \mathcal{P}$ усі власні значення матричного полінома (1.170) *розташовані в області Λ_k вигляду* (1.158).

Теорему 1.25 можна використовувати для параметричних та інтервальних сімей регулярних матричних поліномів:

$$F(\lambda, p) = \sum_{i=1}^{\nu} p_i (A_{0i} + \lambda A_{1i} + \cdots + \lambda^s A_{si}), \quad p \in \mathcal{P}_\nu, \qquad (1.172)$$

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s, \quad \underline{A}_i \leq A_i \leq \overline{A}_i, \quad i = \overline{0, s}. \quad (1.173)$$

Сім'ю (1.170) можна подати у вигляді (1.172) в тому випадку, коли всі вектори параметрів $p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i}$ мають однакову розмірність ν і збігаються. Тоді система (1.171) складається з ν матричних нерівностей. Інтервальна сім'я (1.173), що найчастіше використовується, також описується у вигляді (1.170) (див. зауваження 1.6). При цьому система (1.171) складається з $2^{(s+1)n^2}$ матричних нерівностей.

Зазначимо, що за допомогою лем 1.24 і 1.25 можна отримати аналоги теореми 1.25 для сімей матричних функцій

$$F(\lambda, p) = \sum_{i=0}^{s} f_i(\lambda) A_i(p_i),\ \det F(\lambda, p) \not\equiv 0,\ p = [p_0^\top, ..., p_s^\top]^\top \in \mathcal{P},$$

і відповідних класів областей вигляду (1.148).

1.7 Матричні нерівності в термінах функцій сліду

Функції сліду $\mu(A)$ ***і*** $\mu_*(A)$**.** У просторі матриць $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ введемо скалярні функції:

$$\mu(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - \nu\, \mathrm{tr}A^2, \quad \mu_*(A) = \mathrm{tr}A\, \mathrm{tr}A^* - \nu\, \mathrm{tr}(AA^*). \quad (1.174)$$

Тут ν —задане дійсне число. Оскільки слід матриці збігається із сумою її власних значень, то

$$\mu(A) = \varphi(z) \triangleq \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)^2 - \nu \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

де $z = \xi + i\eta$, $\xi = \big[\xi_1, \ldots, \xi_n\big]^\top$, $\eta = \big[\eta_1, \ldots, \eta_n\big]^\top$, $\lambda_k = \xi_k + i\eta_k \in \sigma(A)$, $k = \overline{1,n}$. Якщо спектр $\sigma(A)$ дійсний, то $\mu(A) = \varphi(\xi) \in \mathbb{R}$. Функція $\mu_*(A)$ завжди набуває дійсних значень і має вигляд

$$\mu_*(A) = \mu(A_R) + \mu(A_I), \quad (1.175)$$

де $A_R = (A + A^*)/2$ і $A_I = (A - A^*)/(2i)$ — ермітові складові в розкладі $A = A_R + iA_I$.

Мають місце нерівності [20]

$$\mathrm{tr}(AA^*) \geq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2, \quad \mathrm{tr}A_R^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2, \quad \mathrm{tr}A_I^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2. \quad (1.176)$$

Тут рівності виконуються в тому і лише в тому випадку, коли матриця A *нормальна*, тобто $AA^* = A^*A$. Співвідношення (1.176) є наслідком нерівностей Вейля для власних і сингулярних чисел матриці [21]. За допомогою співвідношень (1.174)—(1.176) при $\nu \geq 0$ можна встановити нерівності

$$\mu(A_R) \leq \varphi(\xi), \quad \mu(A_I) \leq \varphi(\eta), \quad \mu_*(A) \leq \varphi(\xi) + \varphi(\eta). \tag{1.177}$$

Очевидно, що якщо $\nu \leq 0$, то $\varphi(\xi) \geq 0$ для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Якщо ж $\nu \geq n$, то із подання

$$\varphi(\xi) = (n - \nu) \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \sum_{k<s\leq n} (\xi_k - \xi_s)^2 \tag{1.178}$$

випливає $\varphi(\xi) \leq 0$. Далі припускатимемо, що $0 \leq \nu \leq n$.

Зазначимо, що подання (1.178) є наслідком тотожності Лагранжа [20]:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\Big)^2 \equiv \sum_{k<s\leq n} (\xi_k \eta_s - \xi_s \eta_k)^2.$$

Позначимо $p(A)$ і $q(A)$ кількості власних значень матриці A з урахуванням кратностей відповідно з додатними і від'ємними дійсними частинами.

Лема 1.27 *Якщо виконуються умови*

$$\mathrm{tr} A_R > 0, \quad \mu(A_R) > 0, \quad 0 \leq \nu < n, \tag{1.179}$$

то $p(A) > \nu$. Аналогічно $q(A) > \nu$, якщо

$$\mathrm{tr} A_R < 0, \quad \mu(A_R) > 0, \quad 0 \leq \nu < n. \tag{1.180}$$

Зауваження 1.8 Із доведення леми 1.27 випливає, що нестрогі нерівності $p(A) \geq \nu$ і $q(A) \geq \nu$ виконуються при $0 < \nu \leq n$, якщо $\mu(A_R) \geq 0$ і відповідно $\mathrm{tr} A_R > 0$ і $\mathrm{tr} A_R < 0$. Якщо $\mu(A_R) \geq 0$ при $0 \leq \nu \leq n$, то можна гарантувати, що $q(A) \leq n - \nu$ і $p(A) \leq n - \nu$, якщо відповідно $\mathrm{tr} A_R \geq 0$ і $\mathrm{tr} A_R \leq 0$.

Зауваження 1.9 Якщо матриця $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ має дійсний спектр або $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то в (1.177) $\varphi(\eta) \leq 0$. У цьому випадку твердження леми 1.27 та зауваження 1.8 будуть виконуватись, якщо замість $\mu(A_R)$ використати функцію $\mu_*(A)$.

Для ермітової матриці A функції $\mu(A)$, $\mu(A_R)$ і $\mu_*(A)$ збігаються. У цьому випадку маємо таке твердження.

Наслідок 1.3 *Нехай $A = A^*$ — ермітова матриця і виконуються умови $\mu(A) > 0$ і $n-1 \le \nu < n$. Тоді $A > 0$ $(A < 0)$ у тому й лише в тому випадку, коли* $\mathrm{tr}A > 0$ $(\mathrm{tr}A < 0)$. *Якщо $\mu(A) \ge 0$ і $n-1 \le \nu \le n$, то невід'ємна (недодатна) визначеність матриці $A = A^*$ еквівалентна нерівності* $\mathrm{tr}A \ge 0$ $(\mathrm{tr}A \le 0)$.

Локалізація та дихотомія спектра щодо аналітичних кривих. Нехай аналітична крива Λ_f^0 вигляду (1.54) розділяє комплексну площину $\mathbb{C}$ на дві непорожні області Λ_f^+ і Λ_f^-, де $f(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}$, γ_{ij} — коефіцієнти ермітової матриці $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_1^r$. За умов оборотності (1.56) оператора

$$\mathbf{L}_f X = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(A) X f_j(A)^*$$

має місце *дихотомія спектра* $\sigma(A)$ матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ щодо кривої Λ_f^0, тобто $\sigma(A) \cap \Lambda_f^0 = \emptyset$. Використовуючи теореми 1.10, 1.11 та наслідок 1.3, отримуємо такі твердження.

Теорема 1.26 *Нехай $\nu \in [n-1, n)$ і для деякої матриці $X = X^*$ сумісна система нерівностей*

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{L}_f X) > 0, \quad \mu(\mathbf{L}_f X) > 0, \tag{1.181}$$

Тоді виконуються такі твердження: 1) $\sigma(A) \cap \Lambda_f^0 = \emptyset$*;* 2) *якщо $X > 0$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$;* 3) *якщо* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$*, то* $\mathrm{i}_0(X) = 0$*;* 4) *якщо* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = \mathrm{i}_-(\Gamma) = 1$*, то області Λ_f^+ і Λ_f^- містять відповідно* $\mathrm{i}_+(X)$ *і* $\mathrm{i}_-(X)$ *власних значень матриці A з урахуванням кратностей.*

Зауваження 1.10 Якщо оператор $\mathbf{L}_f$ оборотний, то система нерівностей (1.181) має розв'язок $X = X^*$. Наприклад, розв'язок матричного рівняння $\mathbf{L}_f X = \alpha I_n$, де $\alpha > 0$, задовольняє систему (1.181). Якщо $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ тоді і лише тоді, коли для будь-якої матриці $Y = Y^* > 0$ дане рівняння має розв'язок $X = X^* > 0$ (див. параграф 1.2).

Теорема 1.27 *Нехай* $\nu \in [\, n-1, n)$ *і* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$. *Тоді всі власні значення матриці* A *розташовані в області* Λ_f^+ *в тому і лише в тому випадку, коли система нерівностей* (1.181) *має розв'язок* $X = X^* > 0$.

Умови локалізації та розподілу спектра матриці A у теоремах 1.26 і 1.27 можна послабити, використовуючи властивості типу керованості пари матриць (A, Y), де $Y = \mathbf{L}_f X \geq 0$ (див. леми 1.9 та 1.10).

Розділ 2

Стійкість динамічних систем

2.1 Основні означення та теореми про стійкість руху

Розглянемо систему *нелінійних* диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = g(x,t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор стану системи, визначений в околі $\mathcal{S}_0$ його початкового значення x_0, g — векторна функція, яка неперервна за всіма аргументами і задовольняє *умову Ліпшиця*

$$\|g(x,t) - g(z,t)\| \leq L\|x - z\|, \quad x, z \in \mathcal{S}_0, \quad L = \text{const} > 0.$$

Як $\mathcal{S}_0$ зазвичай служить куля $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq h\}$.

За таких припущень виконуються теореми про локальне існування на скінченному інтервалі, єдиність та неперервну залежність від початкових даних $t_0 > 0$ і $x_0 \in \mathcal{S}_0$ розв'язку $x(t) = X(t, t_0, x_0)$ системи (2.1). У теорії стійкості Ляпунова кожний розв'язок системы може бути нескінченно продовжений вправо, тобто $x(t) \in \mathcal{S}_0$ існує при $t_0 \leq t < \infty$. Нехай $z(t) = Z(t, t_0, z_0)$ — один із таких розв'язків системи (2.1), $z(t_0) = z_0$.

Означення 2.1 Розв'язок $z(t)$ системи (2.1) називають *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що довільний інший розв'язок $x(t)$ при $t \geq t_0$ задовольняє умову

$$\|x_0 - z_0\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Якщо при цьому $\delta = \delta(\varepsilon)$ не залежить від t_0, то стійкість розв'язку $z(t)$ є *рівномірною* за початковим моментом. Розв'язок $z(t)$ системи (2.1) називають *нестійким за Ляпуновим*, якщо для деяких $\varepsilon > 0$, $t_0 > 0$ і будь-якого $\delta > 0$ існує розв'язок $x(t)$ і момент часу $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такі, що $\|x_0 - z_0\| < \delta$ і $\|x(t_1 - z(t_1))\| \geq \varepsilon$.

Означення 2.2 Розв'язок $z(t)$ системи (2.1) називають *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і для будь-якого $t_0 > 0$ існує $\delta = \delta(t_0) > 0$ таке, що всі розв'язки $x(t)$ задовольняють умову

$$\|x_0 - z_0\| \le \delta \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}\big[x(t) - z(t)\big] = 0. \tag{2.3}$$

Множину початкових векторів x_0, для яких виконується умова (2.3), називають *областю притягання* розв'язку $z(t)$, при цьому $z(t)$ є *атрактором* системи (2.1). Якщо ця область заповнює весь простір $\mathbb{R}^n$, то розв'язок $z(t)$ називають *асимптотично стійким у цілому*. Розв'язок $z(t)$ системи (2.1) називають *рівномірно асимптотично стійким*, якщо він рівномірно стійкий і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $\delta > 0$ і $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ такі, що всі розв'язки $x(t)$ задовольняють умову (2.3) при $t \ge t_0 + t_1$.

Означення 2.3 Розв'язок $z(t)$ системи (2.1) називають *експоненціально стійким*, якщо існують додатні числа α, β і γ такі, що для кожного її розв'язоку $x(t)$ при $\|x_0 - z_0\| \le \beta$ і $t \ge t_0$ виконується оцінка

$$\|x(t) - z(t)\| \le \gamma\,\|x_0 - z_0\|\,e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{2.4}$$

У нуведених означеннях розв'язок $z(t)$ системи (2.1) називають *незбуреним*, а розв'язок $x(t)$ — *збуреним*. Якщо система (2.1) *автономна* (f не залежить від t) або ω-*періодична* $\big(f(x, t+\omega) \equiv f(x,t)\big)$, то кожний її стійкий за Ляпуновим розв'язок є рівномірно стійким за початковим моментом, а кожний асимптотично стійкий розв'язок є рівномірно асимптотично стійким. Із експоненціальної стійкості розв'язку $z(t)$ системи (2.1) випливає його асимптотична стійкість.

Зазначимо, що задачі дослідження різних типів стійкості розв'язку $z(t)$ системи (2.1) зазвичай зводяться до аналогічних задач про стійкість нульового розв'язку $x \equiv 0$ (*стану рівноваги*) системи рівнянь збуреного руху:

$$\dot{x} = f(x,t), \quad f(0,t) \equiv 0, \quad t \ge t_0, \tag{2.5}$$

де $f(x,t) = g\big(x + z(t), t\big) - g\big(z(t), t\big)$.

Досить універсальним та ефективним методом дослідження стійкості руху є метод *функцій Ляпунова* вигляду $v : \mathcal{S}_0 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, де $\mathcal{S}_0$ — окіл початку координат $x = 0$. Такі функції мають бути неперервно диференційованими і задовольняти тотожність $v(0, t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Означення 2.4 Функцію $v(x, t)$ називають *додатно визначеною*, якщо існує функція $w : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}$ така, що $v(x, t) \geq w(x) > 0$ за всіх $t \geq 0$ і $x \neq 0$, причому $v(0, t) \equiv w(0) = 0$. Функцію $v(x, t)$ називають *невід'ємно визначеною*, якщо $v(x, t) \geq 0$ за всіх $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^n$. Функцію $v(x, t)$ називають *від'ємно* (*недодатно*) *визначеною*, якщо $-v(x, t)$ — додатно (невід'ємно) визначена функція. Функцію $v(x, t)$ називають *знаковизначеною*, якщо вона додатно або від'ємно визначена.

Функція $v(x, t)$ має *нескінченно малу вищу межу* при $x \to 0$, якщо $v(x, t) \overset{t}{\rightrightarrows} 0$ при $\|x\| \to 0$, $t \geq t_0$. Функція $v(x, t)$ допускає *нескінченно велику нижчу межу* при $x \to \infty$, якщо $v(x, t) \overset{t}{\rightrightarrows} \infty$ при $\|x\| \to \infty$, $t \geq t_0$.

Вираз
$$\dot{v}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + f^\top(x, t)\, \mathrm{grad}_x v(x, t) \tag{2.6}$$
називають *похідною за часом функції v в силу системи* (2.5). При обчисленні цього виразу розв'язок системи (2.5) не використовують.

Теорема 2.1 (перша теорема Ляпунова). *Якщо існує додатно визначена функція $v(x, t)$, що допускає невід'ємно визначену похідну $\dot{v}(x, t)$ в силу системи* (2.5), *то нульовий стан $x \equiv 0$ цієї системи стійкий за Ляпуновим.*

За умов теореми 2.1 кожний розв'язок системи (2.5) з початковим вектором $x_0 \in \mathcal{S}_0$ є продовженим вправо і обмеженим при $t \geq t_0$. Якщо функція Ляпунова $v(x, t)$ у теоремі 2.1 допускає нескінченно малу вищу межу при $x \to 0$, то нульовий стан $x \equiv 0$ системи (2.5) рівномірно стійкий за початковим моментом (К. П. Персидський).

Теорема 2.2 (друга теорема Ляпунова). *Нехай існує додатно визначена функція* $v(x,t)$*, що допускає нескінченно малу вищу межу при* $x \to 0$ *і від'ємно визначену похідну* $\dot{v}(x,t)$ *в силу системи* (2.5)*. Тоді нульовий стан* $x \equiv 0$ *цієї системи асимптотично стійкий.*

Якщо умови теореми 2.2 доповнити вимогою існування нескінченно великої нижчої межі функції $v(x,t)$ при $x \to \infty$, то нульовий стан $x \equiv 0$ системи (2.5) буде асимптотично стійким у цілому (теорема Барбашина—Красовського [16]).

Теорема 2.3 (третя теорема Ляпунова). *Нехай існує функція* $v(x,t)$*, що допускає нескінченно малу вищу межу при* $x \to 0$ *і знаковизначену похідну* $\dot{v}(x,t)$ *в силу системи* (2.5)*. Якщо будь-який окіл* $\mathcal{S}_0$ *початку координат містить точку* x_0 *таку, що* $v(x_0,t_0)\,\dot{v}(x_0,t_0) > 0$ *за деякого* $t_0 \geq 0$*, то нульовий стан* $x \equiv 0$ *цієї системи нестійкий за Ляпуновим.*

Умови теореми 2.3 можна послабити, якщо розглядати лише деяку частину околу $\mathcal{S}_0$, що примикає до початку координат (М. Г. Четаєв). Функції $v(x,t)$, що задовольняють умови першої, другої та третьої теорем Ляпунова, називають функціями Ляпунова відповідно *1-го*, *2-го* та *3-го роду*.

Основні теореми методу функцій Ляпунова допускають зворотні твердження (див., наприклад, [37]). Так, для системи (2.5) знайдено умови існування функцій Ляпунова 1-го роду (К. П. Персидський) і 2-го роду (Х. Л. Массера).

Зазначимо, що використані властивості функцій Ляпунова та їх похідних у силу системи можна еквівалентно визначити в термінах так званих *$\mathcal{K}$-функцій.* Неперервну функцію $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ називають $\mathcal{K}$-функцією, якщо вона монотонно зростає і $\omega(0) = 0$. У сформульованих твердженнях вимогу додатної визначеності функції Ляпунова $v(x,t)$ можна замінити умовою $v(x,t) \geq \omega(\|x\|)$, де $\omega \in \mathcal{K}$ — деяка $\mathcal{K}$-функція. Аналогічно, існування нескінченно малої вищої межі функції $v(x,t)$ при $x \to 0$ еквівалентне умові $v(x,t) \leq \omega(\|x\|)$.

Наведемо наслідки теорем 2.1 і 2.2 для класу нелінійних систем, поданих у векторно-матричній формі:

$$\dot{x} = A(x,t)\,x, \quad t \geq t_0, \tag{2.7}$$

де $A(x,t)$ — неперервна матрична функція. Нелінійні системи такої структури іноді називають *псевдолінійними*. Досліджуючи стійкість нульового стану системи (2.7), доцільно використовувати квадратичні функції Ляпунова $v(x,t) = x^\top X(t)x$ з неперервно диференційованою додатно визначеною матрицею $X(t)$. У цьому випадку вираз (2.6) похідної за часом у силу системи (2.7) має вигляд

$$\dot{v}(x,t) = x^\top Y(x,t)x, \quad Y(x,t) = \dot{X}(t) + A^\top(x,t)X(t) + X(t)A(x,t).$$

Наслідок 2.1 *Якщо для деякої симетричної матриці $X(t)$ і деякого $\varepsilon > 0$ виконуються співвідношення*

$$\varepsilon I_n \leq X(t), \quad Y(x,t) \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \ \ t \geq t_0,$$

то нульвий стан $x \equiv 0$ системи (2.7) стійкий за Ляпуновим. Нульовий стан системи (2.7) рівномірно асимптотично стійкий, якщо

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad Y(0,t) \leq -\delta I_n, \quad t \geq t_0,$$

де $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ і $\delta > 0$.

Ці твердження випливають із теорем 2.1, 2.2 та співвідношень

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 \|x\|^2 \leq \lambda_{\min}\big(X(t)\big)\|x\|^2 \leq v(x,t) \leq \lambda_{\max}\big(X(t)\big)\|x\|^2 \leq \varepsilon_2\|x\|^2, \\ \dot{v}(x,t) \leq \lambda_{\max}\big(Y(x,t)\big)\|x\|^2 \leq -\delta_1\|x\|^2, \quad 0 < \delta_1 < \delta. \end{gathered} \tag{2.8}$$

При цьому з неперервної залежності $Y(x,t)$ випливає, що $Y(x,t) \leq -\delta_1 I_n$ в околі $\mathcal{S}_0$ при $t \geq t_0$ і $Y(0,t) \leq -\delta I_n$.

Зазначимо, що кожну диференціальну систему (2.5) з неперервно диференційованою векторною функцією f можна подати у вигляді (2.7), при цьому [15]

$$A(x,t) = \frac{1}{n}\int_0^1 J(\theta x,t)\,d\theta, \quad J(x,t) = \left\| \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n.$$

Тут $J(x,t)$ — *матриця Якобі* векторної функції $f(x,t)$.

Теорема 2.4 (М. М. Красовський [37]). *Нехай векторна функція $f(x,t)$ має неперервні й обмежені частинні похідні за компонентами x в околі $\mathcal{S}_0$ при $t \geq t_0$. Тоді стан $x \equiv 0$ системи* (2.5) *експоненціально стійкий в тому і лише в тому випадку, коли в деякому околі $\widetilde{\mathcal{S}}_0 \subseteq \mathcal{S}_0$ при $t \geq t_0$ існує неперервно диференційована функція Ляпунова $v(x,t)$ така, що*

$$\varepsilon_1 \|x\|^2 \leq v(x,t) \leq \varepsilon_2 \|x\|^2, \quad \dot{v}(x,t) \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right\| \leq \varepsilon_4 \|x\|,$$

де $\varepsilon_i > 0$ — деякі сталі, $i = \overline{1,4}$.

Наступне твердження є посиленням другої теореми Ляпунова для класу *автономних* систем

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad t \geq t_0. \tag{2.9}$$

Теорема 2.5 (Є. О. Барбашин, М. М. Красовський [15]). *Нехай існує додатно визначена функція $v(x)$, що допускає недодатно визначену похідну $\dot{v}(x)$ в силу системи* (2.9), *причому множина $\{x : \dot{v}(x) = 0\}$ не містить цілих траєкторій системи* (2.9), *крім точки $x = 0$. Тоді стан $x \equiv 0$ цієї системи асимптотично стійкий.*

Розглянемо *квазілінійну* диференціальну систему

$$\dot{x} = A(t)\, x + \varphi(x,t), \quad t \geq t_0, \tag{2.10}$$

де $A(t)$ — неперервна і обмежена матрична функція, а векторна функція $\varphi(x,t)$ задовольняє умову

$$\|\varphi(x,t)\| \leq \beta \|x\|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq t_0, \quad \alpha > 0, \ \ \beta > 0. \tag{2.11}$$

При цьому $\sup\limits_{t \geq t_0} \|\varphi(x,t)\| / \|x\| = 0$, $\varphi(0,t) \equiv 0$ і ця система має тривіальний розв'язок $x \equiv 0$.

Кожну систему (2.5), в якої неперервні всі частинні похідні $\partial^2 f_k(x,t)/\partial x_i \partial x_j$ $(k,i,j = \overline{1,n})$, можна подати у вигляді (2.10). При цьому лінійну систему

$$\dot{x} = A(t)\, x, \quad t \geq t_0, \tag{2.12}$$

де $A(t) = J(0,t)$ — матриця Якобі вектор-функції $f(x.t)$ при $x = 0$, називають *лінійним наближенням* системи (2.5).

Теорема 2.6 *Якщо система лінійного наближення* (2.12) *експоненціально стійка, то стан* $x \equiv 0$ *нелінійної системи* (2.10) *асимптотично стійкий. Якщо система лінійного наближення* (2.12) *є автономною, то з її асимптотичної стійкості (нестійкості) випливає асимптотична стійкість (нестійкість) стану* $x \equiv 0$ *системи* (2.10).

Узагальнимо клас нелінійних систем (2.10) як

$$E(x)\dot{x} = A(x,t)\, x + \varphi(x,t), \quad t \geq t_0. \tag{2.13}$$

Тут $E(x)$ і $A(x,t)$ — неперервні та обмежені матричні функції при $x \in \mathcal{S}_0$ і $t \geq t_0$.

Теорема 2.7 *Нехай векторна функція* $\varphi(x,t)$ *задовольняє умову* (2.11) *і для деякої неперервно диференційованої матриці* $X(t) = X^\top(t) > 0$ *виконуються співвідношення*

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, \tag{2.14}$$

$$E_0^\top \dot{X}(t) E_0 + A_0^\top(t) X(t) E_0 + E_0^\top X(t) A_0(t) + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad \varepsilon_0 > 0, \tag{2.15}$$

де $E_0 = E(0)$, $A_0(t) = A(0,t)$, $t \geq t_0$. *Тоді стан* $x \equiv 0$ *системи* (2.13) *асимптотично стійкий.*

Доведення. Для виконання матричної нерівності (2.15) необхідно, щоб матриця E_0 була невиродженою. Інакше множення справа і зліва цієї нерівності відповідно на q і $q^\top$ (q — власний вектор матриці E_0, що відповідає її нульовому власному значенню) призводить до суперечності. Невиродженою повинна бути також матриця $E(x)$ в околі $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$.

Побудуємо функцію Ляпунова 2-го роду для системи (2.13) як $v(x,t) = x^\top E_0^\top X(t) E_0 x$, де $X(t) = X^\top(t) > 0$. Похідна цієї функції в силу системи (2.13) має вигляд

$$\dot{v}(v,t) = x^\top Y(x,t)x + 2x^\top E_0^\top X(t) E_1(x)\varphi(x,t), \tag{2.16}$$

де $Y(x,t) = E_0^\top \dot{X}(t) E_0 + A_1^\top(x,t) X(t) E_0 + E_0^\top X(t) A_1(x,t)$, $A_1(x,t) = E_1(x) A(x,t)$ і $E_1(x) = E_0 E^{-1}(x)$.

За умови (2.15) унаслідок неперервності використовуваних матричних функцій для деякого $\delta_1 < \varepsilon_0$ в околі точки $x = 0$ маємо нерівність $x^\top Y(x,t)x \leq -\delta_1 \|x\|^2$, $t \geq t_0$.

Для оцінювання другого доданку в (2.16) використовуємо умови (2.11), (2.14) і наслідок нерівності Коші:

$$x^\top X y \leq \sqrt{x^\top X x \, y^\top X y}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

що виконується для будь-якої матриці $X = X^\top \geq 0$. Отримаємо

$$\begin{gathered}
x^\top E_0^\top X(t) E_1(x)\varphi(x,t) \leq \\
\leq \sqrt{x^\top E_0^\top X E_0 x \varphi^\top(x,t) E_1^\top(x) X E_1(x) \varphi(x,t)} \leq \\
\leq \varepsilon_2 \sqrt{\lambda_{\max}(E_0^\top E_0) \sup_{x \in \mathcal{S}_0} \lambda_{\max}(E_1^\top(x) E_1(x))} \, \|x\| \|\varphi(x,t)\| \leq \\
\leq \varepsilon_2 \beta \sqrt{\lambda_{\max}(E_0^\top E_0) \sup_{x \in \mathcal{S}_0} \lambda_{\max}(E_1^\top(x) E_1(x))} \, \|x\|^\alpha \|x\|^2.
\end{gathered}$$

При досить малих значеннях $\|x\|$ для деякого $\delta_2 > 0$

$$-\delta_1 + 2\varepsilon_2 \beta \sqrt{\lambda_{\max}(E_0^\top E_0) \sup_{x \in \mathcal{S}_0} \lambda_{\max}(E_1^\top(x) E_1(x))} \, \|x\|^\alpha \leq -\delta_2 < 0$$

і, як наслідок, $\dot{v}(v,t) \leq -\delta_2 \|x\|^2$, тобто функція $v(x,t)$ задовольняє умови другої теореми Ляпунова. При цьому стан $x \equiv 0$ системи (2.13) асимптотично стійкий. $\square$

Істотним розвитком та узагальненням методу функцій Ляпунова в теорії стійкості є *метод порівняння* систем. При цьому роль функції Ляпунова відіграє оператор, що відображає простір станів складної досліджуваної системи у простір станів допоміжної *системи порівняння*. Розв'язки систем порівняння мають властивості типу монотонності щодо деякого конуса у просторі станів, що суттєво спрощує дослідження їх стійкості та асимптотичних властивостей.

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^r$ конус невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}^r_+$ та диференціальну систему

$$\dot{y} = F(y,t), \quad F(0,t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.17}$$

праву частину якої визначено в околі точки $y = 0$. Векторну функцію $F(y,t)$ називають *квазімонотонно зростаючою* щодо конуса $\mathcal{K}$, якщо за всіх $i = \overline{1,r}$ і $t \geq t_0$ виконується умова

$$y \overset{\mathcal{K}}{\leq} z, \quad y_i = z_i \implies F_i(y,t) \leq F_i(z,t). \tag{2.18}$$

Зокрема, якщо $F(y,t)$ диференційована за компонентами y, то умова (2.18) еквівалентна співвідношенням

$$\frac{\partial F_i(y,t)}{\partial y_j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,r}, \quad t \geq t_0.$$

Системи вигляду (2.17), що задовольняють умову (2.18), називають *системами Важевського* [82]. Конус $\mathcal{K}$ є інваріантною множиною даного класу систем. Стан $y \equiv 0$ системи (2.17) називають *стійким у конусі* $\mathcal{K}$, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що $y(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ і $\|y(t)\| \leq \varepsilon$ при $y_0 \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$, $\|y_0\| \leq \delta$ і $t \geq t_0$. Якщо при цьому $\|y(t)\| \to 0$ для деякого $\delta > 0$, то стан $y \equiv 0$ системи (2.17) *асимптотично стійкий в конусі* $\mathcal{K}$.

Теорема 2.8 (В. М. Матросов [1]). *Нехай існує неперервно диференційована вектор-функція* $v(x,t) = \left[v_1(x,t), ..., v_r(x,t)\right]^\top$ *така, що:* 1) $v(0,t) \equiv 0$, $t \geq t_0$; 2) *функція* $v_0(x,t) = \max\limits_j v_j(x,t)$ *додатно визначена і допускає нескінченно малу вищу межу при* $x \to 0$; 3) *виконується конусна нерівність*

$$\dot{v}(x,t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} F(v(x,t),t), \quad t \geq t_0, \tag{2.19}$$

де $F(y,t)$ — деяка квазімонотонно зростаюча функція, $\dot{v}(x,t)$ — похідна векторної функції $v(x,t)$ в силу системи (2.5) *вигляду*

$$\dot{v}(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \left\| \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{r,n} f(x,t).$$

Тоді зі стійкості (рівномірної асимптотичної стійкості) стану $y \equiv 0$ системи (2.17) *випливає стійкість (рівномірна асимптотична стійкість) стану $x \equiv 0$ системи* (2.5).

Якщо всі компоненти векторної функції $v(x,t)$ невід'ємно визначені та виконуються умови теореми 2.8, то для стійкості (асимптотичної стійкості) стану $x \equiv 0$ системи (2.5) достатньо, щоб стан $y \equiv 0$ системи Важевського (2.18) був стійкий (асимптотично стійкий) в конусі $\mathcal{K}$.

Для класу нелінійних автономних систем Важевського:

$$\dot{y} = F(y), \quad v(0,t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.20}$$

справедливе таке твердження.

Теорема 2.9 (А. А. Мартинюк, А. Ю. Оболенський [80]). *Стан $y \equiv 0$ системи Важевського* (2.20) *асимптотично стійкий в конусі $\mathcal{K}$ тоді і лише тоді, коли сумісна система конусних нерівностей $F(y) \overset{\mathcal{K}}{<} 0$ і $y \overset{\mathcal{K}}{>} 0$.*

2.2 Критерії стійкості лінійних систем

Розглянемо *лінійну* диференціальну систему:

$$\dot{x} = A(t)\, x, \quad t \geq t_0, \tag{2.21}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ — неперервна матрична функція. Властивості стійкості одного заданого розв'язку системи (2.21) еквівалентні відповідним властивостям стійкості всіх її розв'язків. Тому в твердженнях про стійкість розв'язків лінійних систем часто з метою скорочення викладок використовують термін "стійкість системи". Наприклад, стверджується, що з експоненціальної стійкості системи (2.21) у сенсі означення 2.3 випливає її асимптотична стійкість.

Якщо матриця A стала, то справедливе також зворотне твердження. Для системи (2.21) використовується поняття експоненціальної стійкості із сильнішими вимогами, ніж у означенні 2.3.

Означення 2.5 Систему(2.21) називають *експоненціально стійкою*, якщо кожний її розв'язок задовольняє двосторонню оцінку

$$\gamma_1 \|x_0\| e^{-\alpha_1(t-t_0)} \le \|x(t)\| \le \gamma_2 \|x_0\| e^{-\alpha_2(t-t_0)}, \quad t \ge t_0, \tag{2.22}$$

де γ_1, γ_2, α_1 і α_2 — деякі додатні числа.

Теорема 2.10 *Система* (2.21) *є експоненціально стійкою тоді і лише тоді, коли для деякої неперервної симетричної матриці* $Y(t)$ *існує неперервно диференційований розв'язок* $X(t)$ *матричного рівняння*

$$\dot{X}(t) + A^\top(t)X(t) + X(t)A(t) = Y(t) \tag{2.23}$$

і виконуються співвідношення

$$\varepsilon_1 I_n \le X(t) \le \varepsilon_2 I_n, \quad -\delta_1 I_n \le Y(t) \le -\delta_2 I_n, \quad t \ge t_0, \tag{2.24}$$

де ε_1, ε_2, δ_1 *і* δ_2 *— деякі додатні числа.*

Це твердження є наслідком співвідношень (2.8) і теореми Малкіна [79] про експоненціальну стійкість лінійних систем, сформульованої в термінах двох квадратичних форм. Співвідношення (2.23) називають матричним *диференціальним рівнянням Ляпунова*, розв'язок якого визначає квадратичну функцію Ляпунова $v(x,t) = x^\top X(t)x$.

Критерій асимптотичної стійкості лінійної системи зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{x} = A\,x, \quad t \ge t_0, \tag{2.25}$$

формулюється в термінах розв'язків матричного *алгебричного рівняння Ляпунова*:

$$A^\top X + XA = -Y. \tag{2.26}$$

Теорема 2.11 *Система* (2.25) *асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для будь-якої матриці* $Y = Y^\top > 0$ *існує єдиний розв'язок* $X = X^\top > 0$ *рівняння* (2.26).

Наведемо спектральні критерії стійкості та асимптотичної стійкості системи (2.25).

Теорема 2.12 *Система* (2.25) *стійка тоді і лише тоді, коли її спектр* $\sigma(A)$ *розташований у замкненій лівій півплощині* $\overline{\mathbb{C}}^-$*, причому власним значенням матриці* A*, розташованим на уявній осі, відповідають прості елементарні дільники. Система* (2.25) *є асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли матриця* A *гурвіцева, тобто* $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$.

В умовах стійкості класу неавтономних лінійних систем (2.21) роль спектра відіграє сукупність усіх *характеристичних показників* Ляпунова. Характеристичним показником скалярної функції $x(t)$ називають границю

$$\chi[x] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|, \tag{2.27}$$

що може бути числом або $\pm\infty$. Характеристичними показниками векторної та матричної функцій є найбільші з характеристичних показників їхніх компонентів. *Фундаментальну матрицю* системи (2.21)

$$\Phi(t) = \left[\, x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t) \,\right],$$

побудовану із максимального числа лінійно незалежних розв'язків $x^{(i)}(t)$, називають *нормальною*, якщо сума характеристичних показників $\sum_{i=1}^n \chi[x^{(i)}(t)]$ є найменшою порівняно з іншими фундаментальними матрицями цієї системи. Множина всіх різних скінченних характеристичних показників системи утворює її *спектр*. Спектр системи (2.21) з неперервною обмеженою $n \times n$-матрицею $A(t)$ складається з $m \leq n$ характеристичних показників $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$.

Теорема 2.13 *Для асимптотичної стійкості системи* (2.21) *достатньо, щоб її максимальний характеристичний показник* α_m *був від'ємним.*

Для мінімального та максимального характеристичних показників системи (2.21) виконуються оцінки

$$\alpha_1 \geq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \lambda_{\min}(S(\tau))d\tau, \quad \alpha_m \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(S(\tau))d\tau,$$

де $S(\tau) = \dfrac{1}{2}\big[A(\tau) + A^{\top}(\tau)\big]$. Такі оцінки випливають з *нерівності Важевського*:

$$\|x(t_0)\|\, e^{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{\min}(S(\tau))d\tau} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|\, e^{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(S(\tau))d\tau}, \qquad (2.28)$$

яка виконується для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (2.21).

Повний спектр системи (2.21) складається з n характеристичних показників з урахуванням *кратностей.* Кратність n_i характеристичного показника α_i дорівнює кількості стовпців деякої нормальної фундаментальної матриці з заданим характеристичним показником.

Для системи (2.21) має місце нерівність Ляпунова:

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} n_i\alpha_i - \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \geq 0.$$

Якщо при цьому виконується рівність, то систему (2.21) називають *правильною*. Величину μ називають *мірою неправильності* системи (2.21).

Істотним доповненням до теорії стійкості станів нелінійних систем за лінійним наближенням є наступний результат.

Теорема 2.14 (Х. Л. Массера [81]). *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\|\varphi(x,t)\| \leq \beta(t)\|x\|^{\alpha}$, *де* $\alpha > 1$, $\beta(t) > 0$ *— функція з нульовим характеристичним показником;*

2) $\max\limits_{1\leq i\leq m} \alpha_i < -\mu/(\alpha - 1)$, *де* α_i *— характеристичні показники лінійної системи* (2.21) *з мірою неправильності* μ.

Тоді стан $x \equiv 0$ *квазілінійної системи* (2.10) *асимптотично стійкий.*

Систему (2.21) називають *звідною*, якщо існує *матриця Ляпунова* $L(t)$ така, що внаслідок *перетворення Ляпунова* $y = L(t)x$ отримують систему зі сталою матрицею Λ:

$$\dot{y} = \Lambda y, \quad \dot{L}(t)L^{-1}(t) + L(t)A(t)L^{-1}(t) \equiv \Lambda.$$

Будь-яка лінійна система є правильною. Неперервно диференційована матриця $L(t)$ є матрицею Ляпунова, якщо $L(t)$ і $\dot{L}(t)$ обмежені і $|\det L(t)| \geq c > 0$ при $t \geq t_0$.

Система (2.21) є звідною тоді і лише тоді, коли деяка її фундаментальна матриця подається у вигляді $\Phi(t) = L(t)e^{t\Lambda}$, де $L(t)$− матриця Ляпунова, Λ — стала матриця (*теорема Єругіна*). Оскільки перетворення Ляпунова лінійної системи не змінює її спектр, то спектр звідної системи формують дійсні частини власних значень сталої матриці Λ. Отже, лінійна система (2.21) стійка тоді і лише тоді, коли всі її характеристичні показники $\alpha_i \leq 0$, причому нульовим значенням α_i відповідають прості елементарні дільники матриці Λ. Лінійна система (2.21) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли $\alpha_i < 0$, $i = \overline{1, m}$. Для системи (2.21) з неперервною ω-періодичною матрицею $A(t)$ нормована фундаментальна матриця має вигляд

$$\Phi(t) = L(t)\, e^{t\Lambda}, \quad L(t+\omega) \equiv L(t), \quad \Lambda = \frac{1}{\omega} \ln \Phi(\omega), \qquad (2.29)$$

де $L(t)$ — неперервна ω-періодична невироджена матриця, $L(0) = I_n$, ln — функція логарифма матриці (*теорема Флоке* [27]). При цьому $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi(\omega)$, де $\Phi(\omega)$ — *матриця монодромії* системи (2.21).

Власні значення λ_i матриці Λ називають *характеристичними показниками*, а власні значення ρ_i матриці $\Phi(\omega)$ — *мультиплікаторами* системи (2.21) з ω-періодичною матрицею $A(t)$. Число ρ є мультиплікатором системи (2.21) тоді і лише тоді, коли для деякого її нетривіального розв'язку виконується умова $x(t+\omega) = \rho x(t)$.

Матриця $L(t)$ в (2.29) є матрицею Ляпунова. Згідно з теоремою Єругіна періодична лінійна система є звідною. Отже, система (2.21) з ω-періодичною матрицею $A(t)$ стійка тоді і лише тоді, коли всі її мультиплікатори ρ_i належать замкненому одиничному кругу $|\rho| \leq 1$, причому значенням $|\rho_i| = 1$ відповідають прості елементарні дільники матриці монодромії $\Phi(\omega)$. Ця система асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли $|\rho_i| < 1$, $i = \overline{1, m}$.

2.3 Диференціальні системи другого порядку

Багато фізичних об'єктів описуються у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку:

$$C\,\ddot{x} + B\,\dot{x} + A\,x = 0, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad t \geq t_0, \tag{2.30}$$

де матричні коефіцієнти A, B і C розміру $n \times n$ можуть бути функціями компонент векторів узагальнених координат x та швидкостей $\dot{x}$, а також часу t. Систему (2.30) можна записати у вигляді

$$E\,\dot{z} = M\,z, \quad z \in \mathbb{C}^{2n}, \quad t \geq t_0. \tag{2.31}$$

Тут

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A & -B \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Будуючи умови стійкості стану $z \equiv 0$ цієї системи, використовують різні припущення щодо матричних коефіцієнтів. Якщо матриця C не залежить від t, то умови асимптотичної стійкості стану $z \equiv 0$ системи (2.31) можна описати в термінах матричних нерівностей (див. теорему 2.7).

Нехай система (2.30) є лінійною автономною й їй відповідає регулярна квадратична в'язка матриць

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C, \quad \det\,F(\lambda) \not\equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Якщо виконуються співвідношення

$$TA + UTB + U^2TC = 0, \quad \operatorname{rank}\big[\,T, UT\,\big] = m, \tag{2.32}$$

де $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ і $T \in \mathbb{C}^{m \times n}$, то (U, T) є лівою власною парою в'язки $F(\lambda)$. Якщо m набуває максимально можливого значення, то така власна пара (U, T) в'язки є максимальною. У цьому випадку спектр в'язки $\sigma(F)$ збігається зі спектром матриці U (див. підрозд. 1.3).

Співвідношення (2.32) виконуються, якщо

$$ZM = UZE, \quad \operatorname{rank} Z = m,$$

де $Z = \left[TB + UTC, T \right]$, (U, Z) — власна пара лінійної в'язки матриць $M - \lambda E$, спектр якої збігається з $\sigma(F)$. Матрицю Z можна визначити як розв'язок системи рівнянь:

$$MZE = EZM, \quad Z = ZEZ.$$

Вона має таку структуру:

$$Z = \begin{bmatrix} T_1 B + T_2 C & T_1 \\ -T_1 A & T_2 \end{bmatrix}.$$

При цьому множину лівих пар квадратичної в'язки $F(\lambda)$, що задовольняють перше співвідношення в (2.32), утворюють матриці

$$U = ZM = \begin{bmatrix} -T_1 A & T_2 C \\ -T_2 A & -T_1 A - T_2 B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}.$$

Тут T_1 і T_2 — довільний розв'язок алгебричної системи:

$$\begin{aligned} AT_1 B - BT_1 A &= CT_2 A - AT_2 C, \\ AT_1 C - CT_1 A &= CT_2 B - BT_2 C, \\ T_1 &= T_1 BT_1 + T_1 CT_2 + T_2 CT_1, \\ T_2 &= T_2 CT_2 - T_1 AT_1. \end{aligned}$$

Зокрема, розв'язок цієї системи можна побудувати в інтегральному вигляді:

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega F^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad T_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega \lambda F^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

де ω — замкнений контур, що відокремлює деяку частину спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(U)$. Якщо матриця C невироджена, то можна покласти $T_1 = 0$ і $T_2 = C^{-1}$.

Теорема 2.15 *Нехай* (U, T) *— максимальна ліва власна пара квадратичної в'язки матриць* $F(\lambda)$. *Диференціальна система* (2.30) *асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для деякої матриці* $Y = Y^* > 0$ *рівняння* $U^*X + XU = -Y$ *має розв'язок* $X = X^* > 0$. *При цьому* $v(z) = z^*R^*XRz$ *є функцією Ляпунова, яка на нетривіальних розв'язках системи задовольняє умови* $v(z) > 0$ *і* $\dfrac{dv(z)}{dt} = -z^*R^*YRz < 0$, *де* $R = \left[\, TB + UTC, TC \,\right]$.

Сформулюємо коефіцієнтні умови стійкості та асимптотичної стійкості системи (2.30) на основі ЛМН щодо $X_1 = X_1^*$, $X_2 = X_2^*$ і V:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad -M^*XE - E^*XM = Y \geq 0\,(> 0). \quad (2.33)$$

Матриця Y в (2.33) має таку структуру:

$$Y = \begin{bmatrix} A^*V^* + VA & -X_1 + A^*X_2C + VB \\ -X_1 + C^*X_2A + B^*V^* & B^*X_2C + C^*X_2B - VC - C^*V^* \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (2.33) при $Y > 0$ є критерієм асимптотичної стійкості системи (2.30).

Поклавши в (2.33) $X_1 = VCV^* + H$, $X_2 = C^{-1}$ і $V = (B - U)^*C^{-1}$ та застосувавши лему Шура до блокових матриць X і Y, отримаємо таке твердження.

Теорема 2.16 *Нехай* $C = C^* > 0$ *та існують матриці* U *і* $H = H^* > 0$ *такі, що*

$$U + U^* > 0, \quad A^*C^{-1}(B - U) + (B - U)^*C^{-1}A \geq W\,(> W), \quad (2.34)$$

де $W = (L - H)^*(U + U^*)^{-1}(L - H)$, $L = A + U^*C^{-1}(B - U)$. *Тоді диференціальна система* (2.30) *стійка (асимптотично стійка). При цьому* $v(z) = z^*Zz$ *є функцією Ляпунова системи, де*

$$Z = \begin{bmatrix} (B - U)^*C^{-1}(B - U) + H & (B - U)^* \\ B - U & C \end{bmatrix}.$$

На підставі теореми 2.16 можна сформулювати різні коефіцієнтні умови стійкості та асимптотичної стійкості системи (2.30), що відповідають додатковим обмеженням на невідомі матриці U і H [4, 8]. Зокрема, поклавши

$$U = \theta B, \quad H = \frac{\gamma}{2}(A + A^*) + \delta B^* C^{-1} B, \quad \delta = \theta(1-\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

і враховуючи, що

$$0 < \delta \leq \frac{1}{4}, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \geq 2, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2\sqrt{\delta}}, \quad \beta = \frac{2-\gamma}{2\sqrt{\delta}},$$

маємо таке твердження.

Наслідок 2.2 *Якщо для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ при $\alpha + \beta \geq 2$ виконуються матричні нерівності*

$$C = C^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad B^* C^{-1} B + \alpha(\alpha + \beta)(A + A^*) > 0,$$

$$A^* C^{-1} B + B^* C^{-1} A - (\alpha A - \beta A^*)(B + B^*)^{-1}(\alpha A^* - \beta A) \geq 0 \, (> 0),$$

то система (2.30) *стійка (асимптотично стійка).*

У цьому твердженні виділимо випадок $\beta = 2 - \alpha$.

Наслідок 2.3 *Нехай для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконуються матричні нерівності*

$$C = C^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad B^* C^{-1} B + 2\alpha(A + A^*) > 0, \tag{2.35}$$

$$\Gamma(\alpha) = \alpha^2 P + \alpha R + Q \leq 0 \;\; (< \; 0), \tag{2.36}$$

де

$$P = (A + A^*)(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$

$$R = -2(A + A^*)(B + B^*)^{-1} A - 2A^*(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$

$$Q = 4A^*(B + B^*)^{-1} A - A^* C^{-1} B - B^* C^{-1} A.$$

Тоді система (2.30) *стійка (асимптотично стійка).*

Означення 2.6 Квадратичну в'язку матриць $\Gamma(\alpha) = \alpha^2 P + \alpha R + Q$, де $P = P^* > 0$, $R = R^*$ і $Q = Q^*$, називають *гіперболічною*, *майже гіперболічною* та *еліптичною*, якщо відповідно $\omega(x) > 0$, $\omega(x) \geq 0$ і $\omega(x) < 0$ для будь-якого вектора $x \neq 0$, де $\omega(x) = (x^* R x)^2 - 4x^* P x x^* Q x$.

Лема 2.1 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *квадратична в'язка матриць* $\Gamma(\alpha)$ *є гіперболічною (майже гіперболічною);*

2) *існує* $\alpha \in \mathbb{R}$, *для якого* $\Gamma(\alpha) < 0$ $\big(\Gamma(\alpha) \leq 0\big)$;

3) $\Gamma(\alpha)$ *має дійсні власні значення* $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{2n}$ *і* $\Gamma(\alpha) < 0$ $(\Gamma(\alpha) \leq 0)$ *при* $\alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1}$ $(\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1})$.

Якщо матриця $A + A^*$ невироджена, то за умови (2.36) наслідку 2.3 квадратична в'язка матриць $\Gamma(\alpha)$ є майже гіперболічною (гіперболічною). Упорядкуємо всі власні значення такої в'язки матриць: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \cdots \leq \alpha_{2n}$.

Наслідок 2.4 *Нехай виконуються умови*

$$A + A^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0.$$

Тоді система (2.30) *стійка (асимптотично стійка), якщо*

$$\Gamma(\alpha) \leq 0, \quad 0 \leq \alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1} \; \big(\Gamma(\alpha) < 0, \quad 0 \leq \alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1}\big).$$

Якщо

$$A + A^* < 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0,$$

то для стійкості (асимптотичної стійкості) системи достатньо, щоб

$$\Gamma(\alpha) \leq 0, \quad \alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1} \leq 0 \; \big(\Gamma(\alpha) < 0, \quad \alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1} \leq 0\big).$$

Зазначимо, що для класу систем (2.30), що описують механічні об'єкти, $C = C^* > 0$ — матриця інерції, $B = D + G$ — матриця дисипативних та гіроскопічних сил, а $A = K + S$ — матриця потенційних і неконсервативних сил, причому $D = D^*$, $K = K^*$, $G = -G^*$, $S = -S^*$. Твердження теореми 2.16 та її наслідків можна сформулювати з урахуванням таких властивостей матричних коефіцієнтів системи (2.30). Наприклад, у наслідках 2.2 і 2.3 слід врахувати, що $A + A^* = 2K$ і $B + B^* = 2D$.

Розглянемо систему (2.30) з невизначеними матричними коефіцієнтами

$$A \in \mathrm{Co}\left\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\right\}, \quad B \in \mathrm{Co}\left\{B_1, \dots, B_{\nu_2}\right\}, \tag{2.37}$$

$$C \in \mathrm{Co}\left\{C_1, \dots, C_{\nu_3}\right\}. \tag{2.38}$$

Система (2.30) робастно стійка щодо множин невизначеностей (2.37) і (2.38), якщо вона асимптотично стійка за будь-яких значень матричних коефіцієнтів із заданих множин. Згідно з (2.33) система (2.30) робастно стійка щодо невизначеностей (2.37) і (2.38), якщо сумісна система ЛМН

$$X > 0, \quad M_{ij}^* X E_k + E_k^* X M_{ij} < 0, \quad i = \overline{1, \nu_1},\ j = \overline{1, \nu_2},\ k = \overline{1, \nu_3},$$

де

$$E_k = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_i & -B_j \end{bmatrix}.$$

З теореми 2.16 та її наслідків випливають достатні умови робастної стійкості системи (2.30) за фіксованої матриці C. Зокрема, маємо таке твердження.

Теорема 2.17 *Нехай для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ при $\alpha + \beta \geq 2$ виконується система матричних нерівностей*

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad \alpha(A_i + A_i^*) \geq 0,$$

$$A_i^* C^{-1} B_j + B_j^* C^{-1} A_i > (\alpha A_i - \beta A_i^*)(B_j + B_j^*)^{-1}(\alpha A_i^* - \beta A_i),$$
$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}.$$

Тоді система (2.30) *робастно стійка щодо невизначеностей* (2.37).

Виділимо достатні умови робастної стійкості системи (2.30) щодо невизначеностей (2.37), які відповідають випадкам $\beta = 2 - \alpha$ при $\alpha \in \{0, 1, -1\}$:

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad \Gamma_{ij}(0) < 0;$$

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad A_i + A_i^* \geq 0, \quad \Gamma_{ij}(1) < 0;$$

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad A_i + A_i^* \leq 0, \quad \Gamma_{ij}(-1) < 0;$$

де $i = \overline{1, \nu_1}$, $j = \overline{1, \nu_2}$. Тут $\Gamma_{ij}(\alpha)$ — гіперболічні квадратичні в'язки матриць вигляду (2.36) при $A = A_i$ та $B = B_j$. Тому умови робастної стійкості системи (2.30) щодо невизначеностей (2.37) можна також сформулювати в термінах середніх власних значень цих квадратичних в'язок матриць (див. наслідок 2.4).

2.4 Робастна абсолютна стійкість лінійних систем із запізненням

Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь запізнювального типу:

$$A_0\, x(t) + A_1 \frac{dx(t)}{dt} + A_2\, x(t - \tau_1) + \cdots + A_s\, x(t - \tau_{s-1}) = 0, \quad (2.39)$$

де $A_0, \ldots, A_s$ — сталі $n \times n$-матриці, $\tau_i \geq 0$ — параметри сталих запізнень, $x(\theta) = x_0(\theta)$, $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$, $0 \leq t_0 \leq t$, $\tau = \max\limits_i \tau_i$, $i = \overline{1, s-1}$.

Нульовий розв'язок системи (2.39) називають *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$, $\|x(\theta)\| < \delta$ і $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$. Нульовий розв'язок системи (2.39) називають *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Задача про *абсолютну стійкість* системи (2.39) полягає в побудові умов, що накладаються на матричні коефіцієнти, за яких нульовий розв'язок асимптотично стійкий за будь-яких сталих значень запізнень $\tau_i \geq 0$, $i = \overline{1, s-1}$.

Лема 2.2 *Для асимптотичної стійкості системи* (2.39) *необхідно і достатньо, щоб усі власні значення матричного квазіполінома*

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda \tau_1} A_2 + \ldots + e^{-\lambda \tau_{s-1}} A_s$$

мали від'ємні дійсні частини.

Із леми 2.2 та [131, теорема 2.7.2] випливає таке твердження.

Теорема 2.18 *Якщо ермітові матриці X, Y, Q і G задовольняють співвідношення*

$$A_0XA_1{}^* + A_1XA_0{}^* + C(G\otimes X)C^* = Y, \tag{2.40}$$

$$BXB^* \geq 0, \quad Y \geq CQC^*, \tag{2.41}$$

$$g_\lambda{}^* H^{-1} g_\lambda \geq \gamma, \quad \lambda\in\overline{\mathbb{C}}^+, \tag{2.42}$$

де $\quad Q>0,\ H<0,\ g_\lambda = h - \left[\, e^{-\tau_1\lambda},\ldots,e^{-\tau_{s-1}\lambda}\,\right]^\top,$

$$B^* = \left[\, A_1{}^*,\ldots,A_s{}^*\,\right],\quad C=\left[\, A_1,\ldots,A_s\,\right],\quad G=\begin{bmatrix}\gamma & h^*\\ h & H\end{bmatrix},$$

то нульовий розв'язок системи (2.39) *асимптотично стійкий.*

У разі діагональної матриці G маємо достатні умови абсолютної стійкості системи (2.39).

Теорема 2.19 *Якщо виконуються співвідношення* (2.41) *і*

$$A_0XA_1{}^* + A_1XA_0{}^* + \sum_{i=1}^{s}\gamma_i A_iXA_i{}^* = Y, \tag{2.43}$$

де $\gamma_1 = 1/\gamma_2+\ldots+1/\gamma_s$, $\gamma_i<0$, $i=\overline{1,s}$, *то система* (2.39) *абсолютно стійка.*

Розглянемо систему (2.39) з невизначеними матричними коефіцієнтами

$$A_i\in\mathrm{Co}\left\{A_{i1},\ldots,A_{i\alpha_i}\right\},\quad i=\overline{0,s}. \tag{2.44}$$

Система (2.39) є *робастно абсолютно стійкою*, якщо її нульовий розв'язок абсолютно стійкий за будь-яких значень матричних коефіцієнтів із заданих множин.

На підставі теореми 2.19 та леми 1.21 маємо таке твердження.

Теорема 2.20 *Якщо для деякої матриці* $X=X^*>0$ *та деяких чисел* $\gamma_i<0$ *виконується система ЛМН:*

$$A_{0k_0}XA_{1k_1}^* + A_{1k_1}XA_{0k_0}^* + \sum_{i=1}^{s}\gamma_iA_{ik_i}XA_{ik_i}^* > 0,\quad k_i=\overline{1,\alpha_i},\ \ i=\overline{0,s},$$

де $\gamma_1 = 1/\gamma_2+\ldots+1/\gamma_s$, *то система* (2.39) *з невизначеними коефіцієнтами* (2.44) *робастно абсолютно стійка.*

2.5 Робастна стійкість у середньому квадратичному стохастичних систем типу Іто

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто:

$$dx(t) = \Big[Adt + \sum_{i=1}^{s} B_i\, dw_i(t)\Big]x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \tag{2.45}$$

де A, B_i — сталі $n \times n$-матриці, w_i — компоненти s-вимірного стандартного вінерівського процесу, для якого

$$\mathbf{M}\{dw(t)\} = 0, \quad \mathbf{M}\{dw(t)dw^*(t)\} = I_s\, dt.$$

Тут $\mathbf{M}$ — символ математичного сподівання.

Нульовий розв'язок системи (2.45) називають *асимптотично стійким у середньоквадратичному*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $t \geq t_0$ умовне математичне сподівання будь-якого розв'язку $x(t)$ задовольняє співвідношення

$$\mathbf{M}\big\{\|x(t)\| \,\big|\, \|x_0\| < \delta\big\} < \varepsilon, \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\big\{\|x(t)\| \,\big|\, \|x_0\| < \delta\big\} = 0.$$

Вивчаючи умови стійкості в середньоквадратичному системи (2.45), використовують функції Ляпунова $v(x) = x^*Xx$, де $X-$ шукана додатно визначена матриця. Математичне сподівання похідної функції $v(x)$ в силу системи (2.45) подається у вигляді

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = x(t)^*\Big(A^*X + XA + \sum_{i=1}^{s} B_i{}^*XB_i\Big)x(t).$$

З другого методу Ляпунова для стохастичних систем випливають наступні алгебричні умови асимптотичної стійкості в середньоквадратичному системи (2.45).

Теорема 2.21 *Якщо для деякої матриці $Y = Y^* > 0$ рівняння*

$$-A^*X - XA - \sum_{i=1}^{s} B_i{}^*XB_i = Y \tag{2.46}$$

має розв'язок $X = X^* > 0$, то нульовий розв'язок системи (2.45) *асимптотично стійкий в середньоквадратичному.*

Розглянемо систему (2.45) з невизначеними матричними коефіцієнтами

$$A \in \mathrm{Co}\left\{A_1, \ldots, A_\alpha\right\},\ B_i \in \mathrm{Co}\left\{B_{i1}, \ldots, B_{i\beta_i}\right\},\ i = \overline{1, s}. \qquad (2.47)$$

Система (2.45) є *робастно стійкою в середньоквадратичному*, якщо її нульовий розв'язок асимптотично стійкий в середньоквадратичному за будь-яких значень матричних коефіцієнтів (2.47). Із теореми 2.21 та леми 1.21 випливає таке твердження.

Теорема 2.22 *Якщо для деякої матриці* $X = X^* > 0$ *виконується система ЛМН:*

$$A_k^* X + X A_k + \sum_{i=1}^{s} B_{ik_i}^* X B_{ik_i} < 0, \quad k = \overline{1, \alpha},\ \ k_i = \overline{1, \beta_i},\ \ i = \overline{1, s},$$

то система (2.45) *з невизначеними коефіцієнтами* (2.47) *робастно стійка в середньоквадратичному.*

2.6 Умови стійкості лінійних систем у термінах функцій сліду

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$E\,\dot{x} = A\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (2.48)$$

де E і A — дійсні матриці розміру $n \times n$. Сформулюємо критерій асимптотичної стійкості системи (2.48), використовуючи функцію матричного сліду $\mu(A) = (\mathrm{tr} A)^2 - \nu\, \mathrm{tr} A^2$ (див. підрозд. 1.7). Припускатимемо, що матриця E невироджена і параметр $\nu = n - 1$.

Теорема 2.23 *Система* (2.48) *асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для деякої матриці* $X = X^\top > 0$ *виконуються нерівності*

$$\mathrm{tr}\,(AXE^\top) < 0, \quad \mu(AXE^\top + EXA^\top) > 0. \qquad (2.49)$$

Доведення. У разі невиродженої матриці E система (2.48) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для будь-якої матриці $Y = Y^\top < 0$ існує єдиний розв'язок $X = X^\top > 0$ матричного рівняння Ляпунова

$$AXE^\top + EXA^\top = Y. \tag{2.50}$$

Якщо матриця $X = X^\top > 0$ задовольняє умови (2.49), то для матриці Y вигляду (2.50) виконуються умови від'ємної визначеності в наслідку 1.3 і, отже, система (2.48) асимптотично стійка. Навпаки, якщо система (2.48) асимптотично стійка, то існує матриця $X = X^\top > 0$, що задовольняє умови (2.49). Справді, множина симетричних від'ємно визначених матриць Y, що задовольняють нерівність $\mu(Y) > 0$, непуста. Наприклад, можна покласти $Y = \alpha I_n$, $\alpha < 0$. При цьому

$$\mathrm{tr}\,(AXE^\top) = \frac{n\alpha}{2} < 0, \ \mu(AXE^\top + EXA^\top) = (n\alpha)^2 - \nu n\alpha^2 = n\alpha^2 > 0,$$

де $X = X^\top > 0$ — розв'язок рівняння (2.50), тобто виконуються нерівності (2.49). □

Розглянемо лінійну систему керування:

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = Ky, \tag{2.51}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування та вимірюваного виходу системи, E, A, B, C і K — сталі матриці відповідних розмірів. Замкнена система має вигляд

$$E\dot{x} = (A + BKC)x. \tag{2.52}$$

Теорема 2.24 *Нехай для деяких матриць K_0 і $X = X^\top > 0$ виконуються умови*

$$\mathrm{tr}(A_0XE^\top) < 0, \quad \mu(A_0XE^\top + EXA_0^\top) > 0, \tag{2.53}$$

де $A_0 = A + BK_0C$. Тоді для будь-якої матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку $K = K_0 + \widetilde{K}$ такої, що

$$\mathrm{tr}(B\widetilde{K}CXE^\top) \le 0, \quad \mu(B\widetilde{K}CXE^\top + EXC^\top\widetilde{K}^\top B^\top) \ge 0, \tag{2.54}$$

замкнена система (2.52) асимптотично стійка. При цьому $v(x) = x^\top X^{-1} x$ є спільною функцією Ляпунова системи для відповідної множини стабілізовних керувань.

Доведення. Замкнена система (2.52) при $K = K_0 + \widetilde{K}$ асимптотично стійка, якщо для деякої матриці $X = X^\top > 0$ виконується матрична нерівність $Y_0 + Y_1 = Y < 0$, де

$$Y_0 = A_0 X E^\top + E X A_0^\top, \quad Y_1 = B\widetilde{K} C X E^\top + E X C^\top \widetilde{K}^\top B^\top,$$

що забезпечує від'ємну визначеність похідної функції $v(x) = x^\top X^{-1} x$ в силу системи. Покажемо, що нерівність $\mu(Y_0 + Y_1) > 0$ є наслідком співвідношень tr Y_0 tr $Y_1 \geq 0$, $\mu(Y_0) > 0$ і $\mu(Y_1) \geq 0$. Справді,

$$\begin{aligned}[\mathrm{tr}(Y_0 + Y_1)]^2 = (\mathrm{tr}Y_0 + \mathrm{tr}Y_1)^2 = (\mathrm{tr}Y_0)^2 + (\mathrm{tr}Y_1)^2 + 2\mathrm{tr}Y_0\,\mathrm{tr}Y_1 > \\ > \nu\,\mathrm{tr}Y_0^2 + \nu\,\mathrm{tr}Y_1^2 + 2\nu\sqrt{\mathrm{tr}Y_0^2\,\mathrm{tr}Y_1^2} \geq \\ \geq \nu\,[\mathrm{tr}Y_0^2 + \mathrm{tr}Y_1^2 + 2|\mathrm{tr}(Y_0 Y_1)|] \geq \nu\,\mathrm{tr}(Y_0 + Y_1)^2,\end{aligned}$$

тобто $\mu(Y_0 + Y_1) > 0$. Тут використано також нерівність Коші—Буняковського для симетричних матриць [20]:

$$|\mathrm{tr}\ (Y_0 Y_1)|^2 \leq \mathrm{tr}\ Y_0^2\,\mathrm{tr}Y_1^2.$$

Отже, за теоремою 2.23 умови (2.53) та (2.54) забезпечують асимптотичну стійкість замкненої системи (2.52). □

Зазначимо, що для системи (2.48) за умови регулярності $\det(A - \lambda E) \not\equiv 0$ можна сформулювати критерії та достатні умови асимптотичної стійкості в термінах функцій сліду деяких матриць, використовуючи наслідок 1.3 та систему ЛМН

$$AXE^\top + EXA^\top + EYE^\top \leq 0, \quad EXE^\top \geq 0. \tag{2.55}$$

При цьому матриця E може бути виродженою. Якщо для деяких матриць $X = X^\top$ і $Y = Y^\top > 0$ виконуються ЛМН (2.55), то система (2.48) асимптотично стійка (див. підрозд. 1.4).

Розділ 3

Стабілізація та оптимізація лінійних систем

У цьому розділі розглядається клас лінійних систем керування зі зворотним зв'язком за вимірюваним виходом. Припускається, що вихід системи формується у вигляді лінійних комбінацій векторів фазових змінних і керування. При цьому зовнішні збурення в рівняннях руху системи та її виходу не враховуються.

3.1 Статичний зворотний зв'язок

Розглянемо *лінійну систему керування*:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування (входу) і спостережуваного (вимірюваного) виходу об'єкта, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матриця коефіцієнтів системи, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матриця входу, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ — матриця виходу за станом і $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$ — матриця виходу за керуванням (матриця обходу), що визначає пряму залежність виходу від входу. Припускатимемо, що матриці B і C мають повний ранг:

$$\operatorname{rank} B = m, \quad \operatorname{rank} C = l. \tag{3.2}$$

Блок-схему такої системи керування наведено на рис. 3.1. Її особливістю є можливість використання у зворотному зв'язку вимірювань лінійних комбінацій як вектора стану системи, так і керування.

Керування u в системі (3.1) будуємо у вигляді лінійного *зворотного зв'язку за виходом*:

$$u = Ky, \tag{3.3}$$

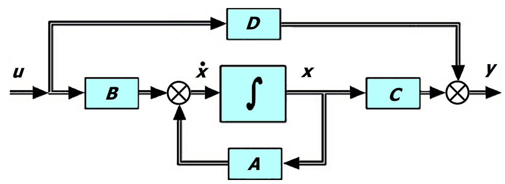


Рис. 3.1. Блок-схема системи керування

де K — матриця коефіцієнтів підсилення розміру $m \times l$. Одна із основних задач для системи (3.1) (*задача стабілізації*) полягає у знаходженні матриці K, за якої замкнена система (3.1), (3.3) асимптотично стійка.

Розв'язуючи задачу стабілізації системи (3.1), будемо використовувати ортогональні доповнення та псевдообернені матриці матричних коефіцієнтів B і C, які за умов (3.2) визначаються співвідношеннями

$$B^\top B^\perp = 0, \quad \det\left[\, B, B^\perp \,\right] \neq 0, \quad B^+ = (B^\top B)^{-1} B^\top, \tag{3.4}$$

$$C^\perp C^\top = 0, \quad \det\left[\, C^\top, C^{\perp\top} \,\right] \neq 0, \quad C^+ = C^\top (C C^\top)^{-1}. \tag{3.5}$$

Застосовуючи матрицю $B^\perp$ ($C^\perp$), припускаємо, що $m < n$ ($l < n$).

3.1.1 Зворотний зв'язок за станом

Нехай у системі (3.1) $C = I_n$ і $D = 0$. У цьому випадку спостережуваним виходом системи є вектор x, а керування u визначається у вигляді лінійного *зворотного зв'язку за станом*:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx. \tag{3.6}$$

Пару матриць (A, B) називають *стабілізовною*, якщо існує матриця $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, для якої замкнена система

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + BK, \tag{3.7}$$

асимптотично стійка. Множину таких матриць зворотного зв'язку K позначимо як $\mathcal{K}(A, B)$.

Достатньою умовою стабілізовності пари (A, B) є її властивість *керованості*, яка еквівалентна кожній з умов

$$\operatorname{rank}\left[\, B, AB, \ldots, A^{n-1}B \,\right] = n, \tag{3.8}$$

$$\operatorname{rank}\left[\, A - \lambda I_n, B \,\right] = n, \quad \lambda \in \sigma(A). \tag{3.9}$$

Рівність (3.8) є критерієм керованості Калмана системи (3.6), а умова (3.9) рівносильна *керованості спектра* цієї системи. Якщо рівність (3.9) виконується на спектрі $\sigma(A)$, то вона виконується також всюди в площині $\mathbb{C}$.

Наведемо критерії стабілізовності системи (3.6).

Теорема 3.1 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *пара (A, B) стабілізовна, тобто $\mathcal{K}(A, B) \neq \emptyset$;*

2) *існують матриці $X = X^\top > 0$ і Z, для яких*

$$AX + XA^\top + BZ + Z^\top B^\top < 0, \tag{3.10}$$

при цьому

$$K = ZX^{-1} \in \mathcal{K}(A, B); \tag{3.11}$$

3) *існує матриця $X = X^\top > 0$, для якої*

$$AX + XA^\top < 2BB^\top, \tag{3.12}$$

при цьому

$$K = -\gamma B^\top X^{-1} \in \mathcal{K}(A, B), \quad \gamma \geq 1; \tag{3.13}$$

4) *існує матриця $X = X^\top > 0$, для якої*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)\, B^\perp < 0, \tag{3.14}$$

при цьому

$$K = -\gamma B^\top X^{-1} \in \mathcal{K}(A, B), \quad \gamma \geq \gamma_0, \tag{3.15}$$

де $\gamma_0 > 0$ — деяке число;

5) *якщо $\lambda \in \sigma(A)$ і $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, то*

$$\operatorname{rank}\left[\, A - \lambda I_n, B \,\right] = n. \tag{3.16}$$

При виконанні одного із тверджень 2—4 квадратична форма $v(x) = x^\top X^{-1} x$ є функцією Ляпунова для замкненої системи (3.7).

Доведення. Очевидно, що $1 \Rightarrow 2$, оскільки нелінійна щодо $X = X^\top > 0$ і K матрична нерівність Ляпунова:

$$Y = (A + BK)X + X(A + BK)^\top < 0, \tag{3.17}$$

яка еквівалентна асимптотичній стійкості системи (3.7), за умови (3.11) набуває вигляду ЛМН (3.10). Зокрема, при $Z = -B^\top$ маємо нерівність (3.12), тобто $2 \Rightarrow 3$. При цьому кожна матриця (3.13) задовольняє нерівність (3.17).

Помноживши співвідношення (3.12) зліва та справа відповідно на $B^{\perp\top}$ і $B^\perp$, отримаємо нерівність (3.14), тобто $3 \Rightarrow 4$. При цьому існує $\gamma_0 > 0$ таке, що кожна матриця (3.15) задовольняє нерівність (3.17). Дійсно, використовуючи невироджену матрицю $T = \left[B^{+\top}, B^\perp\right]$, перетворимо співвідношення (3.17):

$$T^\top Y T = \begin{bmatrix} B^+ L B^{+\top} - 2\gamma I_n & B^+ L B^\perp \\ B^{\perp\top} L B^{+\top} & S \end{bmatrix} < 0,$$

де $L = AX + XA^\top$, $S = B^{\perp\top} L B^\perp$. Це співвідношення за лемою Шура еквівалентне двом нерівностям

$$S < 0, \quad H = B^+(L - LB^\perp S^{-1} B^{\perp\top} L) B^{+\top} < 2\gamma I_n.$$

Тут перша нерівність збігається з (3.14), а друга виконується при $\gamma > \gamma_0 = \lambda_{\max}(H)/2$. Отже, $4 \Rightarrow 1$.

У випадку виконання одного зі співвідношень (3.10), (3.12) або (3.14) при $X = X^\top > 0$ квадратична форма $v(x) = x^\top X^{-1} x$ є функцією Ляпунова для замкненої системи (3.7), оскільки її похідна в силу системи з урахуванням (3.17) $\dot v(x) = x^\top W x < 0$ при $x \neq 0$, де $W = M^\top X^{-1} + X^{-1} M = X^{-1} Y X^{-1} < 0$.

Покажемо, що $3 \Rightarrow 5$. Нехай $q^* \neq 0$ — лівий власний вектор матриці A, що відповідає її власному значенню $\lambda \in \sigma(A)$ і $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Тоді згідно з (3.12) маємо

$$0 \leq q^*(AX + XA^\top)q = 2\mathrm{Re}\lambda\, q^* X q < 2\|q^* B\|^2, \quad q^* B \neq 0.$$

Для будь-якого іншого вектора $q^* \neq 0$ виконується нерівність $q^*(A - \lambda I_n) \neq 0$. Отже, $q^*\left[\, A - \lambda I_n, B \,\right] \neq 0\ \forall q \in \mathbb{C}^n$, що еквівалентно умові (3.16).

Нарешті покажемо, що 5 ⇒ 1. Наведемо декомпозицію Калмана некерованої системи (3.6) [43]:

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + A_3 z_2 + B_1 u, \quad \dot{z}_2 = A_2 z_2. \tag{3.18}$$

Тут

$$x = Gz = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}AG = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

G — деяка невироджена матриця, $z_1 \in \mathbb{R}^r$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, $r = \operatorname{rank}\big[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\big]$. При цьому $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ і підмножина спектра $\sigma(A_2)$ некерована. Оскільки пара (A_1, B_1) керована, то система (3.18) стабілізовна тоді і лише тоді, коли $\sigma(A_2) \subseteq \mathbb{C}^-$. Така спектральна властивість системи (3.18) випливає із твердження 5, оскільки умова (3.16) з урахуванням декомпозиції (3.18) набуває вигляду

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_r & A_3 & B_1 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n-r} & 0 \end{bmatrix} = n,$$

де блок $A_2 - \lambda I_{n-r}$ має бути невиродженим при $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}^+$. □

Властивість керованості (3.9) є посиленням вимоги стабілізовності (3.16). Зіставляючи умови (3.9) і (3.16), бачимо, що для керованості пари матриць (A, B) необхідно і достатньо, щоб обидві пари матриць (A, B) і $(-A, B)$ були стабілізовними (див. також [114]).

Із тверджень 2—4 теореми 3.1 випливають досить ефективні способи знаходження стабілізовної матриці зворотного зв'язку $K \in \mathcal{K}(A, B)$, що базуються на розв'язанні ЛМН (3.10), (3.12) і (3.14). Умови сумісності цих нерівностей збігаються і еквівалентні стабілізовності пари (A, B). Переваги використання нерівності (3.14) порівняно з (3.10) і (3.12) очевидні, якщо враховувати розміри відповідних матричних виразів. Проте в разі використання нерівності (3.14) коефіцієнт γ в (3.15) може бути досить великим, а його точне оцінювання є складним. Тому в цьому випадку доцільно розв'язувати послідовно дві ЛМН (3.14) і (3.17). Зазначимо також, що згідно з твердженням 2 теореми 3.1 множина всіх стабілізовних матриць зворотного зв'язку за станом описується в термінах ЛМН:

$$\mathcal{K}(A,B)=\left\{ZX^{-1}:\ AX+XA^\top+BZ+Z^\top B^\top<0,\ X=X^\top>0\right\}.$$

Якщо в теоремі 3.1 замість A використовувати вираз $A_\alpha = A+\alpha I_n$ при $\alpha \geq 0$, то кожне з тверджень 2—5 є критерієм стабілізовності системи (3.6) зі спектральним запасом $\varepsilon > \alpha$, тобто досягнення її α-стійкості.

3.1.2 Зворотний зв'язок за виходом

Розглянемо систему керування (3.1) при $D=0$:

$$\dot{x}=Ax+Bu, \quad y=Cx, \quad u=Ky. \tag{3.19}$$

Двоїстою властивістю стабілізовності системи є детектовність. Пару матриць (A,C) називають *детектовною*, якщо пара $(A^\top, C^\top)$ стабілізовна. Достатньою умовою детектовності пари (A,C) є її властивість *спостережуваності*, що еквівалентна кожній із умов

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n. \tag{3.20}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \sigma(A). \tag{3.21}$$

Рівність (3.20) є критерієм спостережуваності Калмана системи (3.19), а умова (3.21) рівносильна *спостережуваності спектра* цієї системи.

Трійку матриць (A,B,C) називають *стабілізовною*, якщо існує матриця K, для якої замкнена система

$$\dot{x}=Mx, \quad M=A+BKC \tag{3.22}$$

є асимптотично стійкою. Нехай $\mathcal{K}(A,B,C)$ — множина таких матриць K.

Наступне твердження дає методику розподілу спектра системи (3.22) щодо уявної осі і, зокрема, метод пошуку стабілізовних матриць $K \in \mathcal{K}(A, B, C)$.

Лема 3.1 *Існує матриця K, для якої спектр $\sigma(M)$ складається з p і q точок у відповідних півплощинах $\mathbb{C}^-$ і $\mathbb{C}^+$, тоді і лише тоді, коли можна розв'язати щодо $X = X^\top$ систему співвідношень*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)B^\perp < 0, \tag{3.23}$$

$$\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}, \quad \mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \tag{3.24}$$

де

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = B^+(L - LRL)B^{+\top}, H_1 = CX(I_n - RL)B^{+\top}, H_2 = -CXRXC^\top,$$

$$L = AX + XA^\top, \quad R = B^\perp S^{-1} B^{\perp\top}, \quad S = B^{\perp\top} L B^\perp.$$

За умов (3.23) *і* (3.24) *матрицю K можна визначити, розв'язуючи одну із еквівалентних матричних нерівностей*

$$H_0 + KH_1 + H_1^\top K^\top + KH_2K^\top < 0, \tag{3.25}$$

$$AX + XA^\top + BKCX + XC^\top K^\top B^\top < 0. \tag{3.26}$$

Доведення. За теоремою інерції [140] матриця M має p і q $(p + q = n)$ власних значень з урахуванням кратностей у відповідних півплощинах $\mathbb{C}^-$ і $\mathbb{C}^+$ лише тоді, коли матрична нерівність (3.26) має розв'язок $X = X^\top$ з інерцією $\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}$. Якщо $p = n$, то $\sigma(M) \subset \mathbb{C}^-$.

Нехай матричну нерівність (3.26) можна розв'язати щодо $X = X^\top$ і K. Покажемо, що виконуються співвідношення (3.23) і (3.24). Застосовуючи лему Шура до блокової матриці $T^\top YT < 0$, де

$$Y = AX + XA^\top + BKCX + XC^\top K^\top B^\top,\ T = \left[B^{+\top}, B^\perp\right],\ \det T \neq 0,$$

маємо систему нерівностей

$$S < 0, \quad Y_1 = H_0 + KH_1 + H_1^\top K^\top + KH_2K^\top < 0, \tag{3.27}$$

яка еквівалентна (3.26). Інерції матриць H і

$$\begin{bmatrix} I_m & K \\ 0 & I_l \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ K^\top & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & H_3^\top \\ H_3 & H_2 \end{bmatrix}$$

збігаються, тому згідно з (1.12) для індексів інерції блокових матриць маємо $\mathrm{i}_\pm(H) = \mathrm{i}_\pm(Y_1) + \mathrm{i}_\pm(H_4)$, де $H_4 = H_2 - H_3 Y_1^{-1} H_3^\top$, $H_3 = H_1 + H_2 K^\top$. За умов (3.27), враховуючи структуру блоків матриці H, отримаємо $\mathrm{i}_-(H) = m$ і

$$\mathrm{i}_+(H) = \mathrm{i}_+(H_4) = \operatorname{rank}\left[\, CXB^\perp, H_3 \,\right] = \operatorname{rank}(CXT\Psi) = l,$$

де Ψ — невироджена матриця вигляду

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_{n-m} & -S^{-1}B^{\perp\top}(XC^\top K^\top + LB^{+\top}) \end{bmatrix}.$$

Покажемо, що за умов (3.23) і (3.24) матричні нерівності (3.25) і (3.26) можна розв'язати щодо K. Використовуючи спектральний розклад невиродженої симетричної матриці H, маємо

$$H = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^\top & U_2^\top \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\top & V_2^\top \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = l, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = m.$$

При цьому $\det U_2 \neq 0$. Дійсно, $U_2 U_2^\top - V_2 V_2^\top = H_2 \geq 0$ і $V_2 = U_2 G$, де G — деяка $l \times m$–матриця така, що $GG^\top \leq I_l$ (див. лему 8.1). Але тоді $\operatorname{rank}\left[U_2, V_2\right] = \operatorname{rank} U_2 = l$.

Покажемо, що існує така матриця K, що $\det(V_1 + KV_2) \neq 0$ і

$$Y_1 = (U_1 + KU_2)(U_1 + KU_2)^\top - (V_1 + KV_2)(V_1 + KV_2)^\top < 0.$$

Остання нерівність виконується, якщо $U_1 + KU_2 = (V_1 + KV_2)F$ або $KU_2(I_l - GF) = V_1 F - U_1$, де F — така $m \times l$–матриця, що $FF^\top < I_m$. Тоді, враховуючи, що $GG^\top \leq I_l$, маємо $GFF^\top G^\top < I_l$ і $\rho(GF) < 1$. Отже, за умов (3.23) і (3.24) матриця

$$K = (V_1 F - U_1)(I_l - GF)^{-1} U_2^{-1}$$

задовольняє співвідношення (3.25) і (3.26). При цьому матриця $V_1+KV_2 = N(I_m-FG)^{-1}$ невироджена, оскільки невиродженими є матриці

$$\begin{bmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N & U_1 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_l & U_2^{-1}V_2 \end{bmatrix}, \quad N = V_1 - U_1 U_2^{-1} V_2.$$

□

Зауваження 3.1 Блокова матриця H в (3.24) подається у вигляді $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^\top \widehat{H}_2^{-1} \widehat{H}_1$, де

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^\top \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} B^+LB^{+\top} & B^+XC^\top & B^+LB^\perp \\ CXB^{+\top} & 0 & CXB^\perp \\ \hline B^{\perp\top}LB^{+\top} & B^{\perp\top}XC^\top & S \end{array}\right] =$$

$$= V \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix} V^\top = W\Delta W^\top, \quad \Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^\top & XC^\top \\ CX & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^\top = \begin{bmatrix} B^{+\top} & 0 & B^\perp \\ A^\top B^{+\top} & C^\top & A^\top B^\perp \end{bmatrix}, \quad W^\top = \begin{bmatrix} B^{+\top} & 0 & B^\perp \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи формулу (1.12) для обчислення індексів інерції блокової матриці $\widehat{H}$ і враховуючи, що $S < 0$, а $V \in \mathbb{R}^{n+l\times 2n}$ — матриця повного рангу $n+l$, маємо

$$\mathrm{i}_+(\widehat{H}) = \mathrm{i}_+(H) \le n, \quad \mathrm{i}_-(\widehat{H}) = \mathrm{i}_-(H) + n - m \le n.$$

Оскільки $W \in \mathbb{R}^{n+l\times n+l}$ — квадратна невироджена матриця, то $\mathrm{i}(\widehat{H}) = \mathrm{i}(\Delta)$ і в твердженні леми 3.1 замість (3.24) можна використовувати співвідношення

$$\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}, \quad \mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}. \tag{3.28}$$

Зауваження 3.2 Якщо $\operatorname{rank}(CXB^\perp) = l$, то $H_2 > 0$ і співвідношення (3.25) за лемою Шура еквівалентне ЛМН щодо K:

$$P^\top KQ + Q^\top K^\top P < F, \tag{3.29}$$

де

$$P = \left[\, I_m, 0 \,\right], \quad Q = \left[\, H_1, I_l \,\right], \quad F_2 = \begin{bmatrix} -H_0 & 0 \\ 0 & H_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Зауваження 3.3 У деяких випадках матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку, що задовольняє співвідношення (3.25) і (3.26), можна побудувати у вигляді

$$K = -\gamma\, B^\top X^{-1} C^+. \tag{3.30}$$

Наприклад, якщо сумісна система співвідношень

$$AX + XA^\top < 2\, BB^\top, \quad (C^+C - I_n)X^{-1}B = 0, \tag{3.31}$$

то матриця (3.30) при $\gamma \geq 1$ задовольняє лінійну нерівність (3.26). Якщо

$$\gamma > \lambda_{\max}(H_0)/2, \quad C^\perp X^{-1} B = 0, \tag{3.32}$$

де X і H_0 визначені в (3.23) і (3.24), то матриця (3.30) є розв'язком нерівності (3.25). При цьому матричні рівності в (3.31) і (3.32) еквівалентні.

Зауваження 3.4 Якщо в лемі 3.1 замість A використати вираз $A_\alpha = A + \alpha I_n$, то отримаємо критерій існування зворотного зв'язку за виходом системи (3.19), за якого задані кількості її власних значень з урахуванням кратностей задовольняють відповідні умови $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$ і $\mathrm{Re}\lambda > -\alpha$. Зокрема, при $\alpha \geq 0$ і $X = X^\top > 0$ цей критерій дає необхідні та достатні умови досягнення α-стійкості системи (3.19).

Наведемо критерії стабілізовності системи (3.19), що базуються на розв'язках матричних рівнянь та нерівностей.

Теорема 3.2 *Наступні твердження є еквівалентними:*
1) *трійка* (A, B, C) *стабілізовна;*
2) *система співвідношень*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)\, B^\perp < 0, X = X^\top > 0,\ \mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \tag{3.33}$$

де матриця H *визначена в* (3.24)*, сумісна;*
3) *система співвідношень*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)\, B^\perp < 0, \quad X = X^\top > 0, \quad \mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}, \tag{3.34}$$

де

$$\Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^\top & XC^\top \\ CX & 0 \end{bmatrix},$$

сумісна;

4) *система матричних нерівностей*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)B^\perp < 0, \; C^\perp(A^\top X^{-1} + X^{-1}A)\,C^{\perp\top} < 0 \quad (3.35)$$

має розв'язок $X = X^\top > 0$*;*

5) *матрична нерівність*

$$AX + XA^\top - XC^\top CX + (BK + XC^\top)(BK + XC^\top)^\top < 0 \quad (3.36)$$

сумісна щодо $X = X^\top > 0$ *і* K*;*

6) *пара* (A, B) *стабілізовна, пара* (A, C) *детектовна і матричне рівняння*

$$AX + XA^\top - XC^\top CX + (BK + XC^\top)(BK + XC^\top)^\top = -BB^\top \quad (3.37)$$

сумісне щодо $X = X^\top \geq 0$ *і* K.

У теоремі 3.2 критерії стабілізовності 2 і 3 системи (3.19) є наслідками леми 3.1 та зауваження 3.1, а критерій 4 випливає з умов сумісності двочленних лінійних матричних нерівностей [112] (див. лему 8.6 та доведення аналогічного критерію стабілізовності дискретних систем у теоремі 6.2). Доведення критеріїв 4—6 наведено у працях [102, 107, 126] (див. також [12]).

Зазначимо, що еквівалентність критеріїв 3 і 4 можна встановити на основі конгруентного перетворення матриці Δ:

$$\Delta_1 = W_1^\top \Delta W_1 = \begin{bmatrix} C^\perp L_1 C^{\perp\top} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

де

$$L_1 = A^\top Y + YA, \quad W_1 = \begin{bmatrix} YC^{\perp\top} & 0 & YC^+ \\ -C^{+\top}L_1C^{\perp\top} & I_l & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = X^{-1}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ I_l & C^{+\top}L_1C^+ \end{bmatrix}, \quad \mathrm{i}(S) = \{l, l, 0\}.$$

Оскільки W_1 — квадратна невироджена матриця, то $\mathrm{i}_\pm(\Delta) = \mathrm{i}_\pm(\Delta_1) = \mathrm{i}_\pm(C^\perp L_1 C^{\perp\top}) + l$. Тому рівність $\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}$ еквівалентна другій матричній нерівності в (3.35).

У разі виконання тверджень 2, 3 або 4 теореми 3.2 відповідну матрицю стабілізовного регулятора K можна визначити як розв'язок однієї з матричних нерівностей (3.25) або (3.26). У твердженнях 5 і 6 така матриця K повинна задовольняти відповідні співвідношення (3.36) і (3.37). У [124] на базі співвідношень (3.35) наведено параметричний опис усієї множини стабілізовних матриць $K \in \mathcal{K}(A, B, C)$.

Нехай в системі (3.1) $D \neq 0$. У цьому випадку зворотний зв'язок (3.3) визначається *неявно*, оскільки вектор спостережуваного виходу $y = Cx + Du$ явно містить керування u.

Введемо на множині матриць $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$ нелінійний оператор

$$\mathbf{D} : \mathbb{R}^{m\times l} \to \mathbb{R}^{m\times l}, \quad \mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K. \tag{3.39}$$

Якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то зворотний зв'язок за виходом $y = Cx + Du$ з матрицею коефіцієнтів K можна розглядати як зворотний зв'язок за виходом $\tilde{y} = Cx$ з матрицею коефіцієнтів $\mathbf{D}(K)$.

Для кожної матриці зворотного зв'язку $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена система (3.1) має вигляд

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C. \tag{3.40}$$

Нехай $\mathcal{K}(A, B, C, D) \subseteq \mathcal{K}_D$ — множина матриць K, за яких система (3.40) асимптотично стійка. Наведемо без доведення використовувані надалі властивості оператора (3.39):

1) якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то

$$\mathbf{D}(K) \equiv K(I_l - DK)^{-1}, \quad I_l + D\mathbf{D}(K) \equiv (I_l - DK)^{-1}; \tag{3.41}$$

2) якщо $K_1 \in \mathcal{K}_D$ и $K_2 \in \mathcal{K}_{D_1}$, то $K_1 + K_2 \in \mathcal{K}_D$ і

$$\mathbf{D}(K_1 + K_2) = \mathbf{D}(K_1) + (I_m - K_1 D)^{-1}\mathbf{D}_1(K_2)\,(I_l - DK_1)^{-1}, \tag{3.42}$$

де $\mathbf{D}_1(K_2) = (I_m - K_2 D_1)^{-1}K_2$, $D_1 = (I_l - DK_1)^{-1}D$;

3) якщо $-K_0 \in \mathcal{K}_D$, то $K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D$ і

$$\mathbf{D}(K) = K_0. \tag{3.43}$$

Згідно з (3.43) для досягнення бажаних властивостей і, зокрема, стійкості системи (3.40) достатньо забезпечити ці властивості системі з матрицею $M_0 = A + BK_0C$. Якщо для деякої матриці X матричну нерівність Ляпунова (3.26) можна розв'язати щодо K, то завжди можна підібрати розв'язок K_0 такий, що $-K_0 \in \mathcal{K}_D$. Наприклад, поклавши $K_0 = \gamma K$, для деякого γ виконуються співвідношення $AX + XA^\top + \gamma\,(BKCX + XC^\top K^\top B^\top) < 0$ і $\det(I + \gamma KD) \neq 0$. Це випливає із неперервної залежності від γ власних чисел наведених матричних виразів. Тому кожне з тверджень 2—6 теореми 3.2 дає методику пошуку стабілізовних матриць $K \in \mathcal{K}(A, B, C, D)$ за умови $K \in \mathcal{K}_D$. Зокрема, маємо такий критерій.

Теорема 3.3 *Лінійна система* (3.1) *стабілізовна за допомогою регулятора* (3.3) *тоді і лише тоді, коли сумісна щодо X система співвідношень* (3.34)*. При цьому стабілізовну матрицю зворотного зв'язку можна визначити у вигляді*

$$K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \tag{3.44}$$

де K_0 — розв'язок ЛМН (3.26)*.*

Враховуючи (3.23), (3.24), (3.32) і (3.43), маємо такі достатні умови α-стійкості системи (3.40).

Наслідок 3.1 *Нехай існує матриця $X = X^\top > 0$, для якої*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top + 2\alpha X)\,B^\perp < 0, \quad C^\perp X^{-1} B = 0, \tag{3.45}$$

де $\alpha \geq 0$. Тоді матриця зворотного зв'язку

$$K = -\mathbf{D}(K_0),\ \ K_0 = \gamma\, B^\top X^{-1} C^+ \in \mathcal{K}_D,\ \ \gamma > \lambda_{\max}(H_0)/2,$$

забезпечує α-стійкість замкненої системи (3.40)*.*

Наведемо необхідні та достатні умови стабілізовності системи (3.1) в термінах властивостей керованості та спостережуваності. Розглянемо матричну функцію

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.46}$$

Якщо пара (A, B) керована або пара (A, C) спостережувана, то $\operatorname{rank} \Lambda(\lambda) \geq n$ для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$. Використовуючи властивості рангу блокової матриці, маємо $\operatorname{rank} \Lambda(\lambda) \equiv n + \operatorname{rank} \Phi(\lambda)$, $\lambda \notin \sigma(A)$, де $\Phi(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D$ — матрична *передавальна функція* системи (3.1).

Наведемо загальну канонічну декомпозицію Калмана системи (3.1). У загальному випадку існує невироджена матриця G така, що

$$G^{-1}AG = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad G^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}.$$

При цьому за допомогою перетворення $x = Gz$ отримуємо систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_3 + A_{13}z_3 + A_{14}z_4 + B_1u, \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u, \\ \dot{z}_3 = A_{33}z_3 + A_{34}z_4, \\ \dot{z}_4 = A_{44}z_4, \end{cases} \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

$$y = C_2z_2 + C_4z_4 + Du, \quad u = Ky,$$

в якій пари матриць

$$(A_{22}, B_2), \quad \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$$

є керованими, а пари матриць

$$(A_{22}, C_2), \quad \left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \right)$$

є спостережуваними (див., наприклад, [150, 155]). Простір станів цієї системи складається з таких підпросторів: керований і неспостережуваний ($z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$), керований і спостережуваний ($z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$), некерований і неспостережуваний ($z_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$), некерований і спостережуваний ($z_4 \in \mathbb{R}^{n_4}$), причому $n = n_1+n_2+n_3+n_4$. Крім того, справедливі співвідношення

$$\Phi(\lambda) = C_2(\lambda I_{n_2} - A_{22})^{-1}B_2 + D, \quad \lambda \notin \sigma(A_{22}),$$

$$\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22}) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44}),$$

$$\sigma(M) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(M_2) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44}),$$

$$G^{-1}MG = \begin{bmatrix} A_{11} & M_{12} & A_{13} & M_{14} \\ 0 & M_{22} & 0 & M_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad K \in \mathcal{K}_D,$$

$$P\Lambda(\lambda)Q = \left[\begin{array}{cccc|c} A_{11}-\lambda I_{n_1} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & B_1 \\ 0 & A_{22}-\lambda I_{n_2} & 0 & A_{24} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33}-\lambda I_{n_3} & A_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}-\lambda I_{n_4} & 0 \\ \hline 0 & C_2 & 0 & C_4 & D \end{array}\right],$$

де

$$P = \begin{bmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

$$M_{12} = A_{12} + B_1\mathbf{D}(K)C_2, \quad M_{14} = A_{14} + B_1\mathbf{D}(K)C_4,$$

$$M_{22} = A_{22} + B_2\mathbf{D}(K)C_2, \quad M_{24} = A_{24} + B_2\mathbf{D}(K)C_4.$$

M — матриця замкненої системи (3.40), $\Lambda(\lambda)$ — матрична функція вигляду (3.46).

З наведених співвідношень випливає, що система (3.1) є стабілізовною тоді і лише тоді, коли стабілізовна керована і спостережувана система

$$\dot{\widetilde{z}}_2 = A_{22}\widetilde{z}_2 + B_2 u, \quad y = C_2\widetilde{z}_2 + Du, \quad \widetilde{z}_2 \in \mathbb{R}^{n_2},$$

а частина спектра системи $\sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44})$, що не є керованою або спостережуваною, розташована в півплощині $\mathbb{C}^-$.

Зазначимо, що некерована частина спектра $\sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44})$ розташована в півплощині $\mathbb{C}^-$, якщо $\operatorname{rank}\Lambda(\lambda) = n+m$ ($\lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$). Аналогічно, за умов $\operatorname{rank}\Lambda(\lambda) = n+l$ ($\lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$) неспостережувана частина спектра $\sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{33})$ розташована в півплощині $\mathbb{C}^-$.

3.2 Динамічний зворотний зв'язок

Визначимо *динамічний зворотний зв'язок* для системи керування (3.1) у вигляді

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{3.47}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану динамічного регулятора (*компенсатора*), Z, V, U і K — матриці відповідних розмірів $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ і $m \times l$, що підлягають визначенню. Число r називають *порядком* динамічного регулятора. Включаючи випадок $r = 0$, маємо *статичний регулятор* $u = Ky$.

При $r \neq 0$ співвідношення (3.1) і (3.47) можна записати в компактному вигляді:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{3.48}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

Лема 3.2 *Система керування* (3.1) *з динамічним зворотним зв'язком* (3.47) *еквівалентна системі керування зі статичним зворотним зв'язком* (3.48) *у розширеному просторі* $\mathbb{R}^{n+r}$.

Таким чином, задачі керування і, зокрема, стабілізації системи (3.1) з динамічним регулятором (3.47) зводяться до аналогічних задач керування для системи (3.48) зі статичним регулятором. Зазначимо, що у задачах керування за умов неповної інформації про стан об'єкта динамічні регулятори мають ширші можливості, ніж статичні.

Нелінійний оператор

$$\widehat{\mathbf{D}} : \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+l)} \to \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+l)}, \quad \widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = (I_{r+m} - \widehat{K}\widehat{D})^{-1}\widehat{K},$$

можна подати у блоковому вигляді:

$$\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right],$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. При цьому замкнена система (3.48) є такою:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}. \tag{3.49}$$

Тут

$$\widehat{M} = \left[\begin{array}{c|c} M & B(I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1}C & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right],$$

$$M = A + B\mathbf{D}(K)C, \quad K \in \mathcal{K}_D.$$

Згідно з (3.2), (3.4) і (3.5) маємо вирази ортогональних доповнень та псевдообернених матриць для матричних коефіцієнтів $\widehat{B}$ і $\widehat{C}$ повного рангу:

$$\widehat{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} B^{\perp} \\ 0_{r\times(n-m)} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}^{+} = (\widehat{B}^{\top}\widehat{B})^{-1}\widehat{B}^{\top} = \begin{bmatrix} B^{+} & 0_{m\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}^{\perp} = \begin{bmatrix} C^{\perp}, 0_{(n-l)\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{C}^{+} = \widehat{C}^{\top}(\widehat{C}\widehat{C}^{\top})^{-1} = \begin{bmatrix} C^{+} & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times l} & I_r \end{bmatrix}.$$

Наведені співвідношення можна використовувати для побудови умов стабілізовності системи (3.1) за допомогою динамічного регулятора (3.47). Так, враховуючи твердження 3 і 4 теореми 3.2 та лему 3.2, одержуємо таке твердження.

Теорема 3.4 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *для системи* (3.1) *існує динамічний регулятор* (3.47) *порядку* r*, що забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи* (3.49)*;*

2) *існують матриці* $X = X^\top > 0$ *і* $X_0 = X_0^\top > 0$*, які задовольняють співвідношення*

$$X \geq X_0, \quad \operatorname{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{3.50}$$

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)\, B^\perp < 0, \quad \mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \tag{3.51}$$

де

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^\top & X_0C^\top \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) *існують матриці* $X = X^\top > 0$ *і* $Y = Y^\top > 0$*, що задовольняють співвідношення*

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)B^\perp < 0, \quad C^\perp(A^\top Y + YA)\, C^{\perp\top} < 0, \tag{3.52}$$

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{3.53}$$

Доведення. Враховуючи твердження 3 теореми 3.2 та лему 3.2, маємо критерій стабілізовності системи (3.1) за допомогою динамічного регулятора (3.47):

$$\widehat{B}^{\perp\top}(\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^\top)\widehat{B}^\perp < 0, \quad \mathrm{i}(\widehat{\Delta}) = \{l + r, n + r, 0\}, \tag{3.54}$$

де

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^\top & \widehat{X}\widehat{C}^\top \\ \widehat{C}\widehat{X} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Тут перше співвідношення з урахуванням структури блокових матриць збігається з матричною нерівністю (3.51) щодо X.

Використаємо конгруентне перетворення матриці $\widehat{\Delta}$:

$$L\widehat{\Delta}L^\top = \begin{bmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \tag{3.55}$$

де

$$L = \begin{bmatrix} I_n & -X_1^\top X_2^{-1} & 0 & -AX_1^\top X_2^{-1} \\ 0 & 0 & I_l & -CX_1^\top X_2^{-1} \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут діагональний блок Δ_0 визначений в (3.51) при $X_0 = X - X_1^\top X_2^{-1} X_1$. При цьому $\mathrm{i}(\Delta_1) = \{r, r, 0\}$, $X \geq X_0$ і $\mathrm{rank}\,(X - X_0) = \mathrm{rank}\,(X_1^\top X_2^{-1} X_1) \leq r$.

Отже, із (3.54) випливають співвідношення (3.50) і (3.51) для деяких матриць $X > 0$ і $X_0 > 0$. Навпаки, якщо систему співвідношень (3.50) і (3.51) можна розв'язати щодо $X > 0$ і $X_0 > 0$, то, враховуючи (3.55), можна знайти блокову матрицю $\widehat{X} > 0$, що задовольняє співвідношення (3.54). При цьому матриця X повинна бути її першим діагональним блоком, а як X_1 і X_2 можна вибрати, наприклад, відповідно множник розкладу $X - X_0 = X_1^\top X_1 \geq 0$ і одиничну матрицю I_r.

Еквівалентність тверджень 1 і 3 є наслідком теореми 3.2 (твердження 4) та леми 3.2. На базі наведених співвідношень можна безпосередньо встановити еквівалентність тверджень 2 і 3. При цьому матриці X і X_0 задовольняють твердження 2 тоді і лише тоді, коли матриці X і $Y = X_0^{-1}$ задовольняють твердження 3 (див. співвідношення вигляду (3.38) для перетвореної матриці Δ_0). □

Зазначимо, що для виконання співвідношень (3.53) необхідно, щоб матриці X і Y були додатно визначеними. Рангова умова в (3.53) еквівалентна нерівності $\mathrm{rank}\,(I_n - YX) \leq r$. Ця нерівність, а також рангова умова в (3.50) завжди виконуються у разі динамічного регулятора повного порядку $r = n$.

Алгоритм побудови стабілізовного динамічного регулятора (3.47) порядку $r \leq n$ для системи (3.1), що випливає з твердження 2 теореми 3.4, складається з таких кроків:

1) знаходження матриць $X = X^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$, які задовольняють співвідношення (3.50) і (3.51);

2) побудова розкладу невід'ємно визначеної матриці

$$X - X_0 = X_1^\top X_1 \geq 0, \quad X_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad \mathrm{rank} X_1 \leq r;$$

3) розв'язування ЛМН

$$\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^\top + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{C}^\top\widehat{K}_0^\top\widehat{B}^\top < 0$$

щодо $\widehat{K}_0$ за умови $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$, де

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & I_r \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix};$$

4) обчислення матриць регулятора (3.47) за формулами

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \;\; U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \\ V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \;\; Z = Z_0 - V_0 (I_l + D K_0)^{-1} D U_0, \end{gathered} \tag{3.56}$$

Теорема 3.5 *Нехай* (A, B) *і* (A, C) *— відповідно стабілізовна і детектовна пари матриць. Тоді для системи* (3.1) *існує динамічний регулятор* (3.47) *на базі спостерігача повного порядку* $r = n$*, що забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи* (3.49).

Доведення. Покладемо в (3.47)

$$Z = A - GC + (B - GD)U, \quad V = G + (B - GD)K, \tag{3.57}$$

де $K \in \mathcal{K}_D$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ і $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — деякі матриці. Тоді перше рівняння в (3.47) описує динаміку *спостерігача*

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi - Du), \tag{3.58}$$

а систему (3.49) можна записати в еквівалентній формі

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{M}\widetilde{x}, \;\; \widetilde{M} = \begin{bmatrix} M_0 & B(I_m - KD)^{-1}U \\ 0_{n\times n} & M_1 \end{bmatrix}, \;\; \widetilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \tag{3.59}$$

де $M_0 = A + B(I_m - KD)^{-1}(U + KC)$, $M_1 = A - GC$, $e = \xi - x$. Зокрема, якщо $K = 0$, то $M_0 = A + BU$.

За припущенням існують матриці K, U і G такі, що матриці M_0 і M_1 гурвіцеві й система асимптотично стійка (3.59). При цьому $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$, тобто (3.58) є асимптотичним спостерігачем системи (3.1). Шукані матриці стабілізовного динамічного регулятора (3.47) можна визначити за допомогою співвідношень (3.57) та

$$U = -KC - (I_m - KD)B^\top X^{-1}, \quad G = Y^{-1}C^\top, \tag{3.60}$$

де $K \in \mathcal{K}_D$ — довільна матриця, а $X = X^\top > 0$ і $Y = Y^\top > 0$ є розв'язками відповідних ЛМН

$$AX + XA^\top < 2\,BB^\top, \quad A^\top Y + YA < 2\,C^\top C. \tag{3.61}$$

□

Зазначимо, що умов теореми 3.5 і навіть властивостей керованості й спостережуваності відповідних пар матриць (A, B) і (A, C) недостатньо для існування стабілізовного статичного зворотного зв'язку (3.3) для системи (3.1).

3.3 Робастна стабілізація лінійних систем

Розглянемо систему керування (3.1) зі статичним зворотним зв'язком (3.3). Припустимо, що для деякої матриці коефіцієнтів підсилення $K_* \in \mathcal{K}_D$ замкнена система

$$\dot{x} = M_* x, \quad M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C, \tag{3.62}$$

де $\mathbf{D}(\cdot)$ — нелінійний оператор (3.39), асимптотично стійка. З міркувань неперервності зрозуміло, що для кожного значення K в околі точки K_* простору матриць $\mathbb{R}^{m\times l}$ замкнена система (3.40) асимптотично стійка.

Побудуємо множину стабілізовних керувань у вигляді

$$u = K\,y, \quad K = K_* + \widetilde{K}, \quad \widetilde{K} \in \mathcal{K}, \tag{3.63}$$

де $\mathcal{K}$ — еліпсоїдальна множина матриць:

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \, K^\top PK \le Q\}, \tag{3.64}$$

яку описують матриці $P = P^\top > 0$ і $Q = Q^\top > 0$ відповідних розмірів $m \times m$ і $l \times l$. Враховуючи еквівалентність співвідношень

$$K^\top PK \le Q, \quad \begin{bmatrix} P^{-1} & K \\ K^\top & Q \end{bmatrix} \ge 0, \quad KQ^{-1}K^\top \le P^{-1},$$

множину (3.64) можна описати також у вигляді

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \, KQ^{-1}K^\top \le P^{-1}\}.$$

При цьому у випадку $m = 1$ еліпсоїд $\mathcal{K}$ описується за допомогою скалярної нерівності.

Із (3.64) випливає $\lambda_{\min}(P)K^\top K \le K^\top PK \le Q \le \lambda_{\max}(Q)I_l$, тому

$$\|K\| = \sqrt{\lambda_{\max}(K^\top K)} \le \rho_* = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}}. \qquad (3.65)$$

Число ρ_* називатимемо *радіусом стабілізації* системи (3.1).

Теорема 3.6 *Нехай для деяких матриць $X = X^\top > 0$ і $K_* \in \mathcal{K}_D$ виконується система співвідношень*

$$D_*^\top Q D_* < P, \qquad (3.66)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} M_*^\top X + XM_* & XB_* & C_*^\top \\ B_*^\top X & -P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0 \,(<0), \qquad (3.67)$$

де

$$M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C, \quad B_* = B(I_m - K_*D)^{-1},$$

$$C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C, \quad D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}.$$

Тоді будь-яке керування (3.63) *забезпечує стійкість (асимптотичну стійкість) системи* (3.1) *та спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top Xx$.*

Доведення. За припущенням $K_* \in \mathcal{K}_D$, тому визначено значення оператора $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_*D)^{-1}K_*$. Якщо $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$, то визначено також значення операторів $\mathbf{D}(K)$ і $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K}D_*)^{-1}\widetilde{K}$, де $K = K_* + \widetilde{K}$. Справді, за умов (3.63) і (3.66) маємо $D_*^\top \widetilde{K}^\top P\widetilde{K}D_* \le D_*^\top QD_* < P$. Оскільки $P > 0$, то звідси випливає, що $1 \notin \sigma(\widetilde{K}D_*)$, тобто матриця $I_m - \widetilde{K}D_*$ невироджена, а разом з нею невиродженою є матриця

$$I_m - KD = (I_m - \widetilde{K}D_*)(I_m - K_*D).$$

Отже, замкнена система (3.1), (3.63) за умови (3.66) подається у вигляді (3.40). За теоремою Ляпунова ця система стійка (асимптотично стійка) тоді і лише тоді, коли для деякої матриці $X = X^\top > 0$ виконується матрична нерівність

$$M^\top X + XM \leq 0\,(< 0), \tag{3.68}$$

де $M = A + B\mathbf{D}(K)C$, $K = K_* + \widetilde{K}$. Враховуючи властивість (3.42) оператора $\mathbf{D}$, цю нерівність можна подати так:

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^\top \mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K})U \leq 0\,(< 0), \tag{3.69}$$

де $W = M_*^\top X + XM_*$, $U = B_*^\top X$ і $V = C_*$.

Застосовуючи лему 8.10 про матричну невизначеність для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, отримаємо умови вигляду (3.66) і (3.67), за яких виконується матрична нерівність (3.69) і, отже, (3.68) для будь-якої матриці $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$. □

Зазначимо, що в [11] на базі так званої властивості неущербності S-процедури отримано аналогічне твердження за умов $K_* = 0$, $P = I_m$ і $Q = \mu I_l$, де μ — радіус стійкості матриць зворотного зв'язку K для системи (3.1). Зауважимо, що (3.66) є наслідком строгої нерівності (3.67), а матриці P і $Q_1 = Q^{-1}$ входять у вираз (3.67) лінійно. Тому ці матриці разом з X можна вважати невідомими та визначати за допомогою комп'ютерних засобів. Це розширює можливості відомої методики квадратичної стабілізації для класу лінійних систем (3.1).

Припустимо, що система (3.1) має невизначені коефіцієнти

$$A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\alpha\},\ \ B \in \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_\beta\},\ \ C \in \mathrm{Co}\{C_1, \ldots, C_\gamma\}, \tag{3.70}$$

де задані набори сталих матриць A_i, B_j і C_k є вершинами деяких політопів у відповідних просторах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ і $\mathbb{R}^{l\times n}$. При цьому вихідні (номінальні) значення матричних коефіцієнтів, за яких визначено стабілізовну матрицю зворотного зв'язку K_*, можуть належати заданим політопам. Тоді матрична нерівність (3.67) з огляду на лінійну залежність блочного виразу Ω від заданих коефіцієнтів випливає із системи аналогічних нерівностей:

$$\begin{bmatrix} M_{ijk}^{\top}X + XM_{ijk} & XB_{j*} & C_{k*}^{\top} \\ B_{j*}^{\top}X & -P & D_{*}^{\top} \\ C_{k*} & D_{*} & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0\,(<0), \tag{3.71}$$

де $\quad M_{ijk} = A_i + B_j\mathbf{D}(K_*)C_k, \quad B_{j*} = B_j(I_m - K_*D)^{-1},$

$$C_{k*} = (I_l - DK_*)^{-1}C_k, \quad i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}.$$

Дійсно, враховуючи (3.70), після множення матричних нерівностей (3.71) на невід'ємні параметри опуклих лінійних комбінацій вершин політопів A_i, B_j і C_k та їх сумування відповідно за i, j і k отримаємо матричну нерівність (3.67). Отже, твердження теореми 3.6 виконується для системи (3.1) з невизначеними коефіцієнтами (3.70), якщо замість (3.67) використати систему матричних нерівностей (3.71).

Наслідок 3.2 *Нехай для деяких матриць* $X = X^{\top} > 0$ *і* $K_* \in \mathcal{K}_D$ *виконується система матричних нерівностей* (3.66) *і* (3.71). *Тоді будь-яке керування* (3.63) *забезпечує стійкість (асимптотичну стійкість) сім'ї систем* (3.1), (3.70) *і спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^{\top}Xx$.

Нехай разом з (3.70) виконуються умови

$$K_* = 0, \quad D \in \mathrm{Co}\big\{D_1, \ldots, D_\delta\big\}. \tag{3.72}$$

Тоді співвідношення (3.66) і (3.71) мають вигляд

$$D_s^{\top}QD_s < P, \quad \begin{bmatrix} A_i^{\top}X + XA_i & XB_j & C_k^{\top} \\ B_j^{\top}X & -P & D_s^{\top} \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0\,(<0), \tag{3.73}$$

де $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$.

Наслідок 3.3 *Нехай для деякої матриці* $X = X^{\top} > 0$ *виконується система ЛМН* (3.73). *Тоді будь-яке керування* (3.63) *забезпечує стійкість (асимптотичну стійкість) сім'ї систем* (3.1), (3.70), (3.72) *і спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^{\top}Xx$.

Зазначимо, що у твердженнях теореми 3.6 та її наслідків замість (3.67), (3.71) і (3.73) можна використати відповідні еквівалентні матричні нерівності менших розмірів (див. зауваження 8.1). Наприклад, у наслідку 3.3 сумісність системи ЛМН

$$\begin{bmatrix} A_i^\top X + XA_i + C_k^\top QC_k & XB_j + C_k^\top QD_s \\ B_j^\top X + D_s^\top QC_k & D_s^\top QD_s - P \end{bmatrix} < 0, \quad X = X^\top > 0,$$

$$i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}, \quad s = \overline{1,\delta},$$

гарантує асимптотичну стійкість сім'ї систем керування (3.70), (3.70), (3.72) і спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top Xx$.

Системи співвідношень (3.71) і (3.73) можна застосовувати, розв'язуючи зворотні задачі робастної стабілізації. Наприклад, для заданої матриці $X > 0$ за умов наслідку 3.3 потрібно побудувати сі'ю систем стабілізації, що описується деякими політопами матричних коефіцієнтів (3.70) і (3.72), а також еліпсоїдом матриць зворотного зв'язку (3.64). У цій задачі невідомими будуть вершини політопів A_i, B_j, C_k і D_s, а також додатно визначені матриці P і Q, що описують еліпсоїд. Матричні невизначеності типу (3.70) і (3.72) можна використовувати також для опису невизначених моделей у задачах ідентифікації параметрів та для оцінювання станів динамічних систем (див., наприклад, [24, 25, 39]).

3.4 Оптимізація у системах стабілізації

3.4.1 Матричне рівняння Ріккаті

Розглянемо систему керування (3.6) з квадратичним функціоналом якості

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty \varphi(x,u)\,dt, \tag{3.74}$$

де

$$\varphi(x,u) = \left[x^\top, u^\top\right] \Phi \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} S & N \\ N^\top & R \end{bmatrix},$$

$x_0 = x(0)$ — вектор початкового стану, а блоки симетричної матриці Φ задовольняють умови

$$R > 0, \quad S \geq NR^{-1}N^\top. \tag{3.75}$$

За деяких умов *оптимальне керування* u, що мінімізує функціонал (3.74), забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (3.7). Оптимальне керування можна знайти за допомогою принципу максимуму Понтрягіна або методом динамічного програмування Беллмана. У цьому випадку *рівняння Беллмана*, що виражає принцип оптимальності, має вигляд

$$\min_u f(x,u) = 0.$$

Тут $f(x,u) = (Ax + Bu)^\top \mathrm{grad}_x\, v(x) + \varphi(x,u)$, $v(x)$ — невідома функція. Використавши необхідну умову мінімуму

$$\mathrm{grad}_u\, f(x,u) = B^\top \mathrm{grad}_x\, v(x) + 2N^\top x + 2Ru = 0$$

і поклавши $v(x) = x^\top X x$, де $X = X^\top$ — шукана матриця, отримаємо

$$u = Kx, \quad K = -R^{-1}(B^\top X + N^\top). \tag{3.76}$$

При цьому

$$f(x,u) = x^\top \big[A^\top X + XA - (XB + N)R^{-1}(B^\top X + N^\top) + S\big]x \equiv 0,$$

якщо

$$A^\top X + XA - (XB + N)R^{-1}(B^\top X + N^\top) + S = 0. \tag{3.77}$$

Співвідношення (3.77) є матричним алгебричним *рівнянням Ріккаті*. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\widetilde{A}^\top X + X\widetilde{A} - XBR^{-1}B^\top X + \widetilde{S} = 0, \tag{3.78}$$

де $\widetilde{A} = A - BR^{-1}N^\top$, $\widetilde{S} = S - NR^{-1}N^\top = G^\top G \geq 0$.

Теорема 3.7 *Нехай виконуються умови* (3.75)*, пара матриць* (A, B) *стабілізовна, а пара матриць* $(\widetilde{A}, G)$ *детектовна. Тоді матричне рівняння Ріккаті* (3.77) *має єдиний розв'язок* $X = X^\top \geq 0$*. При цьому керування* (3.76) *забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи* (3.7) *і мінімальне значення функціонала* (3.74)*, що дорівнює* $J(u, x_0) = x_0^\top X x_0$.

Якщо в теоремі 3.7 припущення детектовності пари матриць $(\widetilde{A}, G)$ посилити вимогою спостережуваності, то розв'язок X рівняння (3.78) має бути додатно визначеним. При цьому $v(x) = x^\top X x$ — функція Ляпунова оптимальної замкненої системи.

Зазначимо, що систему (3.6) можна подати так:

$$\dot{x} = \widetilde{A}x + B\widetilde{u}, \quad \widetilde{u} = \widetilde{K}x, \tag{3.79}$$

де $\widetilde{K} = K + R^{-1}N^\top$, $\widetilde{u} = u + R^{-1}N^\top x$ — новий вектор керування. При цьому квадратичний функціонал (3.74) з урахуванням обмежень (3.75) набуває стандартного вигляду

$$J(\tilde{u}, x_0) = \int_0^\infty (x^\top \widetilde{S}x + \widetilde{u}^\top R\widetilde{u})\, dt. \tag{3.80}$$

Таким чином, задача квадратичної оптимізації системи (3.6) зводиться до розв'язування матричного рівняння Ріккаті (3.78). Один із способів побудови матриці-розв'язку X дає ітераційний процес

$$\begin{gathered}(\widetilde{A} + B\widetilde{K}_s)^\top X_s + X_s(\widetilde{A} + B\widetilde{K}_s) + \widetilde{K}_s^\top R\widetilde{K}_s + \widetilde{S} = 0,\\ \widetilde{K}_{s+1} = -R^{-1}B^\top X_s, \quad s = 0, 1, \ldots .\end{gathered} \tag{3.81}$$

На s-му кроці цього процесу потрібно розв'язати матричне рівняння Ляпунова щодо X_s. Початкове значення $\widetilde{K}_0$ вибирається так, щоб матриця $\widetilde{A} + B\widetilde{K}_0$ була гурвіцевою. За прийнятих припущеннях встановлено збіжність матричної послідовності X_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Окрім того,

$$X_0 \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X = \lim_{s\to\infty} X_s \geq 0.$$

Повне доведення теореми 3.7 на базі ітераційного процесу (3.81) наведено, наприклад, у [151].

3.4.2 Оптимізація та локалізація спектра

Розглянемо систему керування (3.19) і усереднений функціонал якості

$$J(u) = \int_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0) \int_0^\infty (x^\top Sx + u^\top Ru)\, dt\, dx_0, \tag{3.82}$$

де $S = S^\top > 0$, $R = R^\top > 0$, $\mu(x_0) \geq 0$ — вагова функція щільності розподілу початкового вектора x_0 на деякій допустимій множині $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. Як $\mathcal{S}_0$ можна вибрати кулю $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq h\}$.

Ставиться задача знаходження матриці K зворотного зв'язку за виходом, для якої функціонал (3.82) набуває найменшого значення, а спектр замкненої системи

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + BKC, \tag{3.83}$$

розташований у заданій області

$$\Lambda_f^+ = \Big\{\lambda : f(\overline{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \overline{f(\lambda)} f(\lambda) > 0\Big\}. \tag{3.84}$$

Задача мінімізації функціонала (3.82) без обмеження на спектр замкненої системи зводиться до задачі математичного програмування:

$$J(K) = \operatorname{tr}\big[\mathbf{W}(K)\Delta_0\big] \ \rightarrow \inf_{K \in \mathcal{K}} \tag{3.85}$$

з використанням розв'язку $W = \mathbf{W}(K)$ рівняння Ляпунова:

$$-M^\top W - WM = S + C^\top K^\top RKC. \tag{3.86}$$

Тут

$$\Delta_0 = \int_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0)\, x_0 x_0^\top \, dx_0, \quad \mathcal{K} = \big\{K : \mathbf{W}(K) > 0\big\}.$$

Побудуємо розв'язок рівняння (3.86) у вигляді

$$W = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(M)^\top H f_j(M), \tag{3.87}$$

Підставляючи (3.87) в (3.86), маємо рівняння щодо H:

$$\sum_{i,j} \beta_{ij} \varphi_i(M)^\top H \varphi_j(M) = S + C^\top K^\top RKC. \tag{3.88}$$

При цьому область Λ_φ^+, що відповідає функціям типу

$$\varphi(\overline{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \overline{\varphi_i(\lambda)}\, \varphi_j(\lambda) = -(\overline{\lambda} + \lambda) f(\overline{\lambda}, \lambda),$$

складається з двох неперетинних підобластей — області Λ_f^+ вигляду (3.84) і правої півплощини. Якщо H — розв'язок рівняння (3.88), то за теоремою 1.10 матрична нерівність

$$X = -M^\top H - HM > 0 \tag{3.89}$$

забезпечує розміщення спектра замкненої системи в області Λ_f^+. При цьому матриця (3.89) є розв'язком узагальненого рівняння Ляпунова для області Λ_f^+:

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(M)^\top X f_j(M) = S + C^\top K^\top RKC. \tag{3.90}$$

Таким чином, поставлена задача зводиться до задачі математичного програмування. Потрібно мінімізувати функцію (3.85), що обчислюється за допомогою співвідношень (3.87) і (3.88) за обмеження (3.89). Пошук субоптимального розв'язку задачі можна здійснювати градієнтними методами, використовуючи відомий вираз для градієнта функціонала [99]:

$$\frac{dJ(K)}{dK} = 2(RKC + B^\top W)FC^\top,$$

де W — розв'язок рівняння (3.86), зокрема, вираз (3.87), а F — розв'язок рівняння

$$-MF - FM^\top = \Delta_0. \tag{3.91}$$

З необхідної умови мінімуму функції (3.85) випливає співвідношення

$$K = -R^{-1}B^\top WFC^\top (CFC^\top)^{-1}. \tag{3.92}$$

Система матричних співвідношень (3.87)—(3.89), (3.91) і (3.92) є необхідними умовами мінімуму функціонала та розміщення спектра замкненої системи в області (3.84).

Зазначимо, що якщо функцію f, що описує область (3.84), можна подати як

$$f(\overline{\lambda}, \lambda) = -(\overline{\lambda} + \lambda)\psi(\overline{\lambda}, \lambda), \quad \psi(\overline{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \delta_{ij} \overline{\psi_i(\lambda)} \psi_j(\lambda), \tag{3.93}$$

то для обчислення матриці W можна використовувати вираз

$$W = \sum_{i,j} \delta_{ij} \psi_i(M)^\top X \psi_j(M), \tag{3.94}$$

де X — розв'язок рівняння (3.90). У цьому випадку рівняння (3.88) не використовується.

Побудуємо ітераційний процес за такими правилами:
1) вибрати $K_0 \in \mathcal{K}$ і покласти $s = 0$;
2) обчислити матрицю $M_s = A + BK_sC$;
3) визначити матриці H_s і F_s із рівнянь

$$\sum_{i,j} \beta_{ij} \varphi_i(M_s)^\top H_s \varphi_j(M_s) = S + C^\top {K_s}^\top R K_s C,$$

$$-M_s F_s - F_s {M_s}^\top = \Delta_0;$$

4) обчислити вирази $W_s = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(M_s)^\top H_s f_j(M_s)$ і $K_{s+1} = -R^{-1} B^\top W_s F_s C^\top (C F_s C^\top)^{-1}$;
5) збільшити s на одиницю та повернутися до п. 2.

Відмінність цього ітераційного процесу від відомих алгоритмів квадратичної оптимізації полягає в способі обчислення матричної послідовності W_s. Оскільки на кожному кроці W_s є розв'язком рівняння Ляпунова (3.86), то виконуються нерівності $J(K_0) \geq J(K_1) \geq \cdots \geq J(K_s) \geq \ldots$ За умови (3.93) матриці W_s можна визначити також за допомогою формул (3.90) і (3.94). У разі алгебричних областей (3.84) ($f_i(\lambda) = \lambda^i$) використання матричних рівнянь (3.88) або (3.90) замість (3.86) мало змінює обчислювальні труднощі алгоритму. Водночас можливо здійснювати контроль належності спектра системи області (3.84) на кожному кроці оптимізації за допомогою матричних нерівностей $X_s = -M_s^\top H_s - H_s M_s > 0, \quad s = 0, 1, \ldots$

В окремих випадках за умов керованості та спостережуваності системи (3.19) доведено збіжність матричної послідовності K_s [97, 99]. Початкове наближення $K_0 \in \mathcal{K}$ можна визначити методами побудови стабілізовних керувань (див. підрозд. 3.1) або відомими методами модального керування (див., наприклад, [9, 31, 144]).

Зазначимо, що у випадку $C = I_n$, коли вимірам доступні всі компоненти вектора стану об'єкта, послідовність W_s збігається до додатно визначеного розв'язку *рівняння Ріккаті*:

$$A^\top W + WA - WBR^{-1}B^\top W + S = 0.$$

При цьому оптимальному керуванню системи (3.19) відповідає граничне значення матриці зворотного зв'язку:

$$K = \lim_{s\to\infty} K_s = -R^{-1}B^\top W.$$

3.4.3 Оптимізація за умов невизначеності

Розглянемо систему керування (3.1) та квадратичний функціонал якості (3.74) з матрицею $\Phi = \Phi^\top > 0$. Потрібно описати множину керувань (3.63), що забезпечують асимптотичну стійкість замкненої системи та оцінку функціонала $J(u, x_0) \leq \omega$.

Для розв'язування цієї задачі шукаємо квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X x$ з матрицею $X = X^\top > 0$. Якщо виконуються умови (3.63) і (3.66) при $K_* \in \mathcal{K}_D$, то визначені значення операторів $\mathbf{D}(K)$, $\mathbf{D}(K_*)$ і $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K}D_*)^{-1}\widetilde{K}$, де $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$ (див. доведення теореми 3.6). При цьому замкнена система подається у вигляді (3.40), а похідна функції $v(x)$ в силу системи та підінтегральний вираз у (3.74) мають вигляд

$$\dot{v}(x) = x^\top \big(M^\top X + XM\big)\, x, \quad \varphi(x,u) = x^\top L^\top \Phi L\, x,$$

де $M = A + B\mathbf{D}(K)C$, $L^\top = [I_n, C^\top \mathbf{D}^\top(K)]$, $K = K_* + \widetilde{K}$.

Припустимо, що поряд із (3.66) виконується співвідношення

$$\dot{v}(x) \leq -\varphi(x,u) < 0, \quad x \neq 0. \tag{3.95}$$

Тоді система (3.40) асимптотично стійка і, враховуючи (3.95), отримаємо верхню оцінку функціонала (3.74):

$$J(u, x_0) \leq -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\, v(x)\, dt = x_0^\top X\, x_0 = \omega. \tag{3.96}$$

Оскільки $\Phi > 0$, то для виконання (3.95) достатньо, щоб виконувалася матрична нерівність

$$M^\top X + XM + L^\top \Phi L \leq 0. \tag{3.97}$$

Використовуючи властивість (3.42) оператора $\mathbf{D}$, перепишемо нерівність (3.97) у вигляді $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \le 0$, де

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^\top \mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K})U + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K})R_*\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V,$$

$W = M_*^\top X + XM_* + \Phi_*$, $\Phi_* = L_*^\top \Phi L_*$, $L_*^\top = [I_n, C^\top \mathbf{D}^\top(K_*)]$, $U = B_*^\top X + N_*^\top + R_* K_* C$, $V = C_*$, $N_* = N(I_m - K_*D)^{-1}$, $R_* = (I_m - K_*D)^{-1\top} R (I_m - K_*D)^{-1}$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$.

Застосовуючи лему 8.10 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$ та еліпсоїда $\mathcal{K}$, з урахуванням (3.96) отримаємо такий результат.

Теорема 3.8 *Нехай для деяких матриць $X = X^\top > 0$ і $K_* \in \mathcal{K}_D$ виконуються співвідношення*

$$R + D^\top Q D < (I_m - K_*D)^\top P (I_m - K_*D), \tag{3.98}$$

$$\begin{bmatrix} M_*^\top X + XM_* + \Phi_* & XB_* + N_* + C^\top K_*^\top R_* & C_*^\top \\ B_*^\top X + N_*^\top + R_* K_* C & R_* - P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0. \tag{3.99}$$

Тоді будь-яке керування (3.63) *забезпечує асимптотичну стійкість системи* (3.1)*, спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X x$ та оцінку функціонала якості $J(u, x_0) \le v(x_0)$.*

Зауваження 3.5 Твердження теореми 3.8 буде виконуватись, якщо замість припущення $\Phi = \Phi^\top > 0$ використати слабкіше обмеження (3.75), а в (3.99) вимагати виконання строгої матричної нерівності. При цьому співвідношення (3.98) буде наслідком цієї нерівності.

Зазначимо також, що твердження теореми 3.8 виконується для сім'ї систем (3.1), (3.70), якщо замість (3.99) використати систему матричних нерівностей

$$\begin{bmatrix} M_{ijk}^\top X + XM_{ijk} + \Phi_k & XB_{*j} + N_* + C_k^\top K_*^\top R_* & C_{*k}^\top \\ B_{*j}^\top X + N_*^\top + R_* K_* C_k & R_* - P & D_*^\top \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0. \tag{3.100}$$

де $M_{ijk} = A_i + B_j\mathbf{D}(K_*)C_k$, $\Phi_k = L_k^\top \Phi L_k$, $L_k^\top = [I_n, C_k^\top \mathbf{D}^\top(K_*)]$, $B_{*j} = B_j(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_{*k} = (I_l - DK_*)^{-1}C_k$, $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$.

Наслідок 3.4 *Нехай для деяких матриць* $X = X^\top > 0$ *і* $K_* \in \mathcal{K}_D$ *виконується система матричних нерівностей* (3.98) *і* (3.100). *Тоді будь-яке керування* (3.63) *забезпечує асимптотичну стійкість сім'ї систем* (3.1), (3.70), *спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X x$ *та оцінку функціонала якості* $J(u, x_0) \leq v(x_0)$.

Для сім'ї систем (3.1), (3.70), (3.72) виконується аналогічне твердження з використанням матричних нерівностей

$$R + D_s^\top Q D_s < P, \tag{3.101}$$

$$\begin{bmatrix} A_i^\top X + XA_i + S & XB_j + N & C_k^\top \\ B_j^\top X + N^\top & R - P & D_s^\top \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{3.102}$$

де $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$.

Наслідок 3.5 *Нехай для деякої матриці* $X = X^\top > 0$ *виконується система матричних нерівностей* (3.101) *і* (3.102). *Тоді будь-яке керування* (3.63) *забезпечує асимптотичну стійкість сім'ї систем* (3.1), (3.70), (3.72), *спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X x$ *та оцінку функціонала якості* $J(u, x_0) \leq v(x_0)$.

Зазначимо, що у твердженнях теореми 3.8 та її наслідків замість (3.99), (3.100) та (3.102) можна використати відповідні еквівалентні матричні нерівності (див. зауваження 8.1). Наприклад, у наслідку 3.5 сумісність системи ЛМН

$$\begin{bmatrix} A_i^\top X + XA_i + S + C_k^\top Q C_k & XB_j + N + C_k^\top Q D_s \\ B_j^\top X + N^\top + D_s^\top Q C_k & R + D_s^\top Q D_s - P \end{bmatrix} \leq 0,$$

$R + D_s^\top Q D_s < P$, $X = X^\top > 0$, $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$, гарантує асимптотичну стійкість сім'ї систем керування (3.1), (3.70), (3.72), спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X x$ та оцінку функціонала якості $J(u, x_0) \le v(x_0)$.

На підставі теореми 3.8 та її наслідків можна сформулювати такі задачі оптимізації системи (3.1) та сімей систем (3.1), (3.70) і (3.1), (3.70), (3.72):

1) *мінімізувати* $\omega = v(x_0)$ *за умов* (3.98), (3.99) *і* $X = X^\top > 0$;
2) *мінімізувати* $\omega = v(x_0)$ *за умов* (3.98), (3.100) *і* $X = X^\top > 0$;
3) *мінімізувати* $\omega = v(x_0)$ *за умов* (3.101), (3.102) *і* $X = X^\top > 0$.

Для розв'язування цих задач можна застосовувати методи математичного програмування. Параметрами оптимізації можуть бути додатно визначені матриці функції Ляпунова (X), еліпсоїда коефіцієнтів зворотного зв'язку (P і Q), а також функціонала якості (Φ). При цьому результати розрахунків залежить від початкового вектора x_0.

Зазначимо, що замість (3.74) можна використовувати усереднений за початковими умовами квадратичний функціонал

$$J_0(u) = \int_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0)\, J(u, x_0)\, dx_0, \tag{3.103}$$

де $\mu(x_0) \ge 0$ — задана функція на множині $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. За умови (3.95) маємо верхню оцінку функціонала (3.103):

$$J_0(u) = \mathrm{tr}\,(\Sigma\, X) \le \mu_0\, \lambda_{\max}(X),$$

де $\Sigma = \int\limits_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0)\, x_0 x_0^\top\, dx_0, \quad \mu_0 = \int\limits_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0) \|x_0\|^2\, dx_0$. Тому в сформульованих задачах оптимізації 1—3 можна використовувати цільові функції $\omega = \mathrm{tr}\,(\Sigma\, X)$ або $\omega = \mu_0\, \lambda_{\max}(X)$.

3.5 Стабілізація дескрипторних систем

Розглянемо *дескрипторну систему* керування:

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{3.104}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування та спостережуваного виходу. Якщо матриця E невироджена, то цю систему можна подати у вигляді (3.1). У загальному випадку задачі стабілізації системи (3.104) за допомогою статичних і динамічних регуляторів істотно ускладнюються. Вивчимо можливість побудови стабілізовного динамічного зворотного зв'язку:

$$F\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{3.105}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану динамічного регулятора, F, Z, V, U і $K-$ шукані матриці відповідних розмірів.

Співвідношення (3.104) і (3.105) можна подати у вигляді

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{3.106}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ F\dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & F \end{bmatrix}, \; \widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \; \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},$$

При $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена система (3.106) має вигляд

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}. \tag{3.107}$$

Наступне твердження, що узагальнює теорему 3.5, дає умови існування стабілізовного регулятора за станом асимптотичного спостерігача системи (3.104) вигляду

$$E\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi - Du). \tag{3.108}$$

Теорема 3.9 *Нехай система*

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.109}$$

стабілізовна за допомогою статичного зворотного зв'язку за станом, а система

$$E\dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \tag{3.110}$$

детектовна. Тоді існує динамічний регулятор (3.105) *на базі спостерігача повного порядку* (3.108)*, який забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи* (3.107).

Доведення. Покладемо у системі (3.105)

$$F = E,\ Z = A - GC + (B - GD)U,\ V = G + (B - GD)K, \quad (3.111)$$

де $K \in \mathcal{K}_D$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ і $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — деякі матриці. Тоді перше рівняння (3.105) описує динаміку спостерігача (3.108), а замкнену систему (3.107) подають у вигляді

$$\widetilde{E}\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{M}\widetilde{x},\ \widetilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & E \end{bmatrix},\ \widetilde{M} = \begin{bmatrix} M_0 & B(I_m - KD)^{-1}U \\ 0_{n\times n} & M_1 \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{x}^\top = \left[x^\top, e^\top\right]$, $M_0 = A + B(I_m - KD)^{-1}(U + KC)$, $M_1 = A - GC$, $e = \xi - x$. Зокрема, якщо $K = 0$, то $M_0 = A + BU$.

Стабілізовність системи (3.109) означає, що існує матриця K_0 така, що всі власні числа в'язки матриць $L_0(\lambda) = A + BK_0 - \lambda E$ розташовані у півплощині $\mathbb{C}^-$. Аналогічно, детектовність системи (3.110) забезпечує існування матриці K_1 такої, що всі власні числа в'язки матриць $L_1(\lambda) = A + K_1C - \lambda E$ належать півплощині $\mathbb{C}^-$.

Покладемо $U = -KC + (I_m - KD)K_0$ і $G = -K_1$, де $K \in \mathcal{K}_D$ — будь-яка матриця. Тоді спектр замкненої системи (3.107), що складається з об'єднання спектрів в'язок матриць $L_0(\lambda)$ і $L_1(\lambda)$, розташований в $\mathbb{C}^-$ і ця система асимптотично стійка. □

Теорема 3.10 [152] *Система* (3.104) *стабілізовна за допомогою динамічного регулятора* (3.105) *так, що замкнена система* (3.107) *є допустимою (див. підрозд.* 5.3*), тоді і лише тоді, коли сумісна щодо X, Y, P і Q система співвідношень:*

$$\begin{bmatrix} E^\top & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^\top & I_n \\ I_n & Y^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^\top \end{bmatrix},$$

$$A^\top X + X^\top A < PC + C^\top P^\top, \quad AY + Y^\top A^\top < BQ + Q^\top B^\top.$$

При цьому матриці регулятора можна визначити як

$$Z = (X - Y^{-1})^{-1\top}(A^\top Y^{-1} + X^\top A - X^\top BQY^{-1} - PC + PDQY^{-1}),$$

$$F = E, \quad V = (X - Y^{-1})^{-1\top}P, \quad U = -QY^{-1}, \quad K = 0.$$

Наведемо умови стабілізовності системи (3.109) за допомогою статичного зворотного зв'язку за станом.

Теорема 3.11 [152] *Для системи* (3.109) *існує стабілізовний регулятор* $u = Kx$, *за якого замкнена система допустима, тоді і лише тоді, коли сумісна щодо* Y, S *і* G *система ЛМН:*

$$AX + X^\top A^\top + BY + Y^\top B^\top < 0, \quad S = S^\top > 0,$$

де $X = SE^\top + W_E G$, W_E — *матриця, стовпці якої утворюють базис ядра* $\operatorname{Ker} E$. *При цьому матрицю регулятора можна визначити як* $K = YX^{-1}$.

Розділ 4

Псевдолінійні системи керування

У цьому розділі розглядаються нелінійні системи керування, які внаслідок застосування зворотного зв'язку подаються у векторно-матричній *псевдолінійній* формі:

$$\dot{x} = M(x,t)\,x, \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

де M — матриця розміру $n \times n$, що неперервно залежить від стану $x \in \mathbb{R}^n$ і часу t. Припускатимемо, що стан рівноваги $x \equiv 0$ таких систем є ізольованим, тобто в деякому околі точки $x = 0$ немає інших станів рівноваги. Вивчаючи стійкість даного стану, використовують метод квадратичних функцій Ляпунова $v(x,t) = x^\top X(t)x$ з неперервно диференційованою додатно визначеною матрицею $X(t)$. Похідні за часом таких функцій в силу системи (4.1) подаються у вигляді

$$\dot{v}(x,t) = x^\top Y(x,t)\,x, \quad Y(x,t) = \dot{X} + M^\top X + XM.$$

4.1 Статичні та динамічні регулятори

Розглянемо *нелінійну систему керування*

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad y = g(x,u,t), \tag{4.2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування та спостережуваного виходу об'єкта, f і g — задані векторні функції, $t \geq t_0$. Якщо f і g не залежать від часу t, то система є *автономною* . Ця система керування має *прямий зв'язок*, якщо g явно залежить від u. Одна із головних задач для системи (4.2) полягає в побудові законів керування $u(t)$, що забезпечують виконання певних вимог, включаючи стійкість розв'язків. Зазвичай, задача стійкості заданого розв'язку $x(t)$ зводиться до аналізу стійкості стану $x \equiv 0$. При цьому повинні виконуватися тотожності $f(0,0,t) \equiv 0$ і $g(0,0,t) \equiv 0$, а також умови існування та єдиності розв'язків у деякому околі нульового стану.

Практичне застосування мають закони керування, побудовані у вигляді *статичного* або *динамічного* зворотних зв'язків. Статичний зворотний зв'язок системи (4.2) має вигляд

$$u = k(y,t), \tag{4.3}$$

де k — векторна функція, що підлягає визначенню. Більші можливості у задачах керування, порівняно зі статичним зворотним зв'язком, мають динамічні регулятори порядку r:

$$\dot{\xi} = d(\xi, y, t), \quad u = k(\xi, y, t), \tag{4.4}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану регулятора, d і k — шукані векторні функції. Співвідношення (4.3) і (4.4) визначають відповідно статичний та динамічний зворотні зв'язки *за виходом*. У випадку $y \equiv x$ ці співвідношення визначають відповідно статичний та динамічний зворотні зв'язки *за станом*.

Задачі керованості, спостережуваності, стабілізації та детектованості в лінійній постановці добре вивчені. Для класу нелінійних систем (4.2) зазначені характеристики в загальному випадку мають лише локальний характер і визначаються в певній обмеженій області простору станів або в околі досліджуваних станів (програмних траєкторій). При цьому велика кількість результатів дослідження таких задач отримано на базі універсального прийому — методу лінеаризації системи та зворотного зв'язку в околі програмних траєкторій.

Розглянемо клас нелінійних неавтономних систем керування у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = A(x,t)\,x + B(x,t)\,u, \quad y = C(x,t)\,x + D(x,t)\,u, \tag{4.5}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, а матричні функції A, B, C і D відповідних розмірів неперервні при $(x,t) \in \mathcal{S}_0 \times [0,\infty)$, де $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le h\}$ — окіл точки $x = 0$. Система (4.5) при $u = 0$ має нульовий стан рівноваги.

Рівняння статичного регулятора має вигляд

$$u = K(x,t)\, y, \tag{4.6}$$

де K — невідома матрична функція така, що

$$\det[I_m - K(x,t)D(x,t)] \neq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

За умов (4.7) замкнена система (4.5), (4.6) подається у вигляді

$$\dot{x} = M(x,t)\, x, \quad M(x,t) = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{4.8}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. Надалі цікавою є поведінка розв'язків системи (4.8) в околі $\mathcal{S}_0$ нульового стану при $t \geq 0$.

Нелінійний динамічний зворотний зв'язок порядку r для системи (4.5) визначаємо як

$$\dot{\xi} = Z(\xi,t)\, \xi + V(\xi,t)\, y, \quad u = U(\xi,t)\, \xi + K(\xi,t)\, y, \tag{4.9}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$. Система керування (4.5) з динамічним зворотним зв'язком (4.9) порядку $r \neq 0$, як і у лінійному випадку (див. лему 3.2), зводиться до аналогічної системи керування з нелінійним статичним зворотним зв'язком.

Використовуючи критерії стабілізовності лінійних систем (див. розд. 3), можна сформулювати способи побудови статичних і динамічних регуляторів, що забезпечують асимптотичну стійкість стану $x \equiv 0$ деяких підкласів нелінійних систем вигляду (4.5). Наприклад, для нелінійної автономної системи

$$\dot{x} = A(x)\, x + B(x)\, u, \quad y = C(x)\, x + D(x)\, u, \tag{4.10}$$

виконуються такі твердження.

Теорема 4.1 *Нехай існує матриця $X = X^\top > 0$, що задовольняє нерівність*

$$B_0^{\perp\top}(A_0X + XA_0^\top + 2\alpha X)B_0^\perp < 0 \tag{4.11}$$

і одне з еквівалентних співвідношень

$$\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\} \ \ \textit{або} \ \ C_0^\perp(A_0^\top Y + YA_0 + 2\alpha Y)\, C_0^{\perp\top} < 0, \tag{4.12}$$

де $\alpha \geq 0$, $A_0 = A(0)$, $B_0 = B(0)$, $C_0 = C(0)$, $Y = X^{-1}$,

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_0X + XA_0^\top + 2\alpha X & XC_0^\top \\ C_0X & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді статичний регулятор

$$u = K_* y, \quad K_* = (I_m + K_0 D_0)^{-1} K_0, \tag{4.13}$$

де $D_0 = D(0)$, $\det(I_m + K_0D_0) \neq 0$, K_0 *— розв'язок ЛМН*

$$A_0X + XA_0^\top + 2\alpha X + B_0K_0C_0X + XC_0^\top K_0^\top B_0^\top < 0, \tag{4.14}$$

забезпечує асимптотичну стійкість стану $x \equiv 0$ *системи* (4.10) *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top Y x$.

За умов теореми 4.1 з огляду на неперервність матричних коефіцієнтів в околі $x \in \mathcal{S}_0$ виконуються співвідношення

$$M(x)X + XM^\top(x) + 2\alpha X < 0, \quad M(x)^\top Y + YM(x) + 2\alpha Y < 0.$$

Тут $M(x) = A(x) + B(x)\widetilde{K}(x)C(x)$, $\widetilde{K}(x) = \big(I_m - K_*D(x)\big)^{-1}K_*$, $\widetilde{K}(0) = K_0$. При цьому похідна функції $v(x)$ в силу замкненої системи (4.10), (4.13) $\dot{v}(x) < -2\alpha v(x) \leq 0$, а спектр матриці $M(x)$ при $x \in \mathcal{S}_0$ розташований в півплощині $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$.

Аналогічно, на підставі теорем 3.4 і 3.5 можна сформулювати достатні умови існування та способи побудови динамічного регулятора, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану системи (4.10). При цьому побудова динамічного регулятора повного порядку зводиться до розв'язування системи ЛМН (див. підрозд. 3.2).

4.2 Робастна стабілізація нелінійних систем

Розглянемо нелінійну систему керування (4.5) зі статичним регулятором (4.6). Припустимо, що для деякої матричної функції $K_*(x,t)$, яка задовольняє умову (4.7), стан рівноваги $x \equiv 0$ системи

$$\dot{x} = M_*(x,t)\,x, \quad M_*(x,t) = A + B\mathbf{D}(K_*)C, \tag{4.15}$$

є ізольованим і асимптотично стійким. Побудуємо множину стабілізовних матриць зворотного зв'язку (4.6) у вигляді

$$K(x,t) = K_*(x,t) + \widetilde{K}(x,t), \quad \widetilde{K}(x,t) \in \mathcal{K}, \tag{4.16}$$

де $\mathcal{K}$ — еліпсоїд (3.64) у просторі $\mathbb{R}^{m\times l}$. Залежність від x і t усіх матриць A, B, C, D, K_* і $\widetilde{K}$ будемо вважати неперервною і для простоти не вказувати. Матриці $P = P^\top > 0$ і $Q = Q^\top > 0$, що визначають еліпсоїд $\mathcal{K}$, вважаємо сталими, хоча в подальших викладках вони також можуть залежати від x і t.

Згідно з (4.5), (4.6), (4.16) виконується нерівність $z^\top Pz \le y^\top Qy$ або

$$[x^\top, u^\top] \begin{bmatrix} C^\top QC - C^\top K_*^\top PK_*C & C^\top QD + C^\top K_*^\top PG \\ D^\top QC + G^\top PK_*C & D^\top QD - G^\top PG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \ge 0.$$

Тут $z = Gu - K_*Cx$ і $G = I_m - K_*D$. Припустимо, що

$$\Delta(x,t) = D^\top QD - G^\top PG < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \ t \ge 0, \tag{4.17}$$

Тоді із $x = 0$ випливає $u = 0$. Це означає, що $x \equiv 0$ є спільним станом рівноваги замкненої системи для кожної матриці регулятора (4.16).

Теорема 4.2 *Нехай для деяких матричних функцій* $K_*(x,t)$ *і* $X(t) = X^\top(t)$ *виконуються співвідношення* (4.17) *і*

$$\varepsilon_1 I_n \le X(t) \le \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2, \quad t \ge 0, \tag{4.18}$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \dot{X} + M_*^\top X + XM_* + \varepsilon_0 I_n & XB_* & C_*^\top \\ B_*^\top X & -P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{4.19}$$

де $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}$, $x = 0$, $t \ge 0$. *Тоді будь-яке керування* (4.6), (4.16) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x \equiv 0$ *системи* (4.5) *та спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X(t)x$.

Доведення. За умови (4.17) матриця G має бути невиродженою. Тому для будь-яких $x \in \mathcal{S}_0$ і $t \geq 0$ визначено значення оператора $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$. Якщо $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$, то визначено також значення операторів $\mathbf{D}(K)$ і $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K} D_*)^{-1} \widetilde{K}$, де $K = K_* + \widetilde{K}$ (див. доведення теореми 3.6).

Побудуємо функцію Ляпунова для замкненої системи (4.8) як $v(x,t) = x^\top X(t) x$. За умов (4.18) виконується оцінка $\varepsilon_1 \|x\|^2 \leq v(x,t) \leq \varepsilon_2 \|x\|^2$, $t \geq 0$. Для того, щоб похідна функції $v(x,t)$ в силу системи (4.8) в околі $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$ задовольняла оцінку $\dot{v}(x,t) \leq -\varepsilon \|x\|^2$, де $\varepsilon > 0$, достатньо виконання матричної нерівності

$$\dot{X} + M^\top X + XM + \varepsilon I_n \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0. \tag{4.20}$$

При цьому за другою теоремою Ляпунова стан $x \equiv 0$ цієї системи рівномірно асимптотично стійкий. Умова (4.20) означає, що $\sup\limits_{x \in \mathcal{S}_0, t \geq 0} \omega(x,t) \leq -\varepsilon$, де $\omega(x,t) = \lambda_{\max}(\dot{X} + M^\top X + XM)$.

Разом з (4.20) розглянемо умову $\sup\limits_{t \geq 0} \omega(0,t) \leq -\varepsilon_0$, тобто

$$\dot{X} + M_0^\top(t) X + X M_0(t) + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \tag{4.21}$$

де $\varepsilon_0 > \varepsilon$, $M_0(t) = A(0,t) + B(0,t) \mathbf{D}_0\big(K(0,t)\big) C(0,t)$, $t \geq 0$, $\mathbf{D}_0(K) = \big(I_m - K D(0,t)\big)^{-1} K$. З міркувань неперервності зрозуміло, що існує окіл $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$, для якого (4.20) є наслідком (4.21). Використовуючи властивість (3.42) оператора $\mathbf{D}_0$, запишемо нерівність (4.21) у вигляді

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^\top \mathbf{D}_*(\widetilde{K}) V + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K}) U \leq 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0,$$

де $W = \dot{X} + M_*^\top X + X M_* + \varepsilon_0 I_n$, $U = B_*^\top X$, $V = C_*$. Застосовуючи лему про матричну невизначеність 8.10 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, отримаємо умови вигляду (4.17) і (4.19), за яких виконується матрична нерівність (4.21) і, отже, (4.20) для будь-якої матриці $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$. $\square$

Зауваження 4.1 Теорема 4.2 гарантує стійкість за Ляпуновим стану $x \equiv 0$ системи (4.5) на множині керувань (4.6), (4.16), а також спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X(t)x$, якщо замість (4.18) і (4.19) використати слабші умови $\varepsilon_1 I_n \leq X(t)$ і $\Omega(t) \leq 0$ при $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $x = 0$ і $t \geq 0$.

Сформулюємо наслідки теореми 4.2 за наявності функціональних невизначеностей

$$\begin{aligned} &A(0,t) \in \mathrm{Co}\big\{A_1, \dots, A_\alpha\big\}, \quad t \geq 0, \\ &B(0,t) \in \mathrm{Co}\big\{B_1, \dots, B_\beta\big\}, \quad t \geq 0, \\ &C(0,t) \in \mathrm{Co}\big\{C_1, \dots, C_\gamma\big\}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

де задані набори сталих матриць A_i, B_j і C_k є вершинами деяких політопів у відповідних просторах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ і $\mathbb{R}^{l\times n}$. Побудуємо систему лінійних диференціальних матричних нерівностей:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + M_{ijk}^\top X + XM_{ijk} + \varepsilon_0 I_n & XB_{j*} & C_{k*}^\top \\ B_{j*}^\top X & -P & D_*^\top \\ C_{k*} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.23}$$

$i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $\varepsilon_0 > 0$, $x = 0$, $t \geq 0$, де $M_{ijk} = A_i + B_j\mathbf{D}(K_*)C_k$, $B_{j*} = B_j(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_{k*} = (I_l - DK_*)^{-1}C_k$.

Наслідок 4.1 *Нехай для деяких матриць* $X(t) = X^\top(t)$ *і* $K_*(x,t)$ *виконується система матричних нерівностей* (4.17), (4.18) *і* (4.23). *Тоді будь-яке керування* (4.6), (4.16) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x \equiv 0$ *сім'ї систем* (4.5), (4.22) *і спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X(t)x$.

Нехай поряд з (4.22) виконуються умови

$$K_* \equiv 0, \quad D(0,t) \in \mathrm{Co}\big\{D_1, \dots, D_\delta\big\}, \quad t \geq 0. \tag{4.24}$$

Тоді співвідношення (4.17) і (4.23) випливають із системи строгих нерівностей

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A_i^\top X + XA_i + \varepsilon_0 I_n & XB_j & C_k^\top \\ B_j^\top X & -P & D_s^\top \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.25}$$

$$i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}, \quad s = \overline{1,\delta}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad t \geq 0.$$

Наслідок 4.2 *Нехай для деякої матриці* $X(t) = X^\top(t)$ *виконується система матричних нерівностей* (4.18) *і* (4.25)*. Тоді будь-яке керування* (4.6)*,* (4.16) *при* $K_* \equiv 0$ *забезпечує асимптотичну стійкість сім'ї систем* (4.5)*,* (4.22)*,* (4.24) *і спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X(t)x$*.*

Використовуючи теорему 4.2 та її наслідки 4.1 і 4.2, можна шукати спільну квадратичну функцію Ляпунова зі сталою матрицею $X = X^\top > 0$. У цьому випадку лінійні матричні нерівності (4.19), (4.23) і (4.25) є алгебричними ($\dot{X} = 0$). При цьому можна покласти $\varepsilon_0 = 0$ і вимагати виконання відповідних строгих матричних нерівностей.

4.3 Оцінка квадратичного критерію якості за умов невизначеності

Розглянемо систему керування (4.5) та квадратичний функціонал якості

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty \varphi(x, u, t)\, dt, \tag{4.26}$$

де

$$\varphi(x, u, t) = \left[x^\top, u^\top\right] \Phi \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} S(t) & N(t) \\ N^\top(t) & R(t) \end{bmatrix},$$

$x_0 = x(0) \in \mathcal{S}_0$ — вектор початкового стану, а блоки симетричної матриці Φ для деякого $\eta > 0$ задовольняють умови

$$S \geq NR^{-1}N^\top + \eta\, I_n, \quad R > 0, \quad t \geq 0. \tag{4.27}$$

Потрібно описати множину керувань (4.6), (4.16), що забезпечують асимптотичну стійкість нульового розв'язку замкненої системи та оцінку функціонала $J(u, x_0) \leq \omega$. Цю задачу, як і раніше, розв'язуємо методом квадратичної функції Ляпунова $v(x, t) = x^\top X(t)x$ з неперервно диференційованою матрицею $X(t)$, яка задовольняє умови (4.18). За умов (4.16) і (4.17) визначено значення операторів $\mathbf{D}(K)$, $\mathbf{D}(K_*)$ і $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K}D_*)^{-1}\widetilde{K}$, де

$D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$ (див. доведення теореми 3.6). При цьому замкнена система подається у вигляді (4.8), а похідна функції v в силу системи та підінтегральний вираз у (4.26) мають вигляд

$$\dot v(x,t) = x^\top \big(M^\top X + XM\big)\, x, \quad \varphi(x,u,t) = x^\top L^\top \Phi L\, x,$$

де $M(x,t) = A + B\mathbf{D}(K)C$, $L^\top(x,t) = [\, I_n, C^\top \mathbf{D}^\top(K)\,]$, $K = K_* + \widetilde K$. Вимагаємо, щоб поряд з (4.17) і (4.18) виконувались співвідношення

$$\dot v(x,t) \le -\varphi(x,u,t) \le -\eta\, \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{S}_0,\ t \ge 0. \tag{4.28}$$

Тут $\eta > 0$, $\mathcal{S}_0$ — окіл точки $x = 0$, що містить x_0. Для цього достатньо виконання матричних нерівностей (4.27) і

$$\dot X + M_0^\top X + XM_0 + L_0^\top \Phi L_0 + \varepsilon_0 I_n \le 0, \quad t \ge 0, \tag{4.29}$$

де $M_0 = M(0,t)$, $L_0 = L(0,t)$, $\varepsilon_0 > 0$. За умов (4.18) і (4.28) нульовий розв'язок замкненої системи (4.8) асимптотично стійкий і виконується верхня оцінка функціонала (4.26):

$$J(u,x_0) \le -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\, v(x,t)\, dt = x_0^\top X(0)\, x_0 = \omega. \tag{4.30}$$

Матриця M_0 в (4.29) містить вираз оператора $\mathbf{D}_0(K) = \big(I_m - KD(0,t)\big)^{-1}K$. Використовуючи властивість (3.42) цього оператора, перепишемо співвідношення (4.29) у вигляді $\mathbf{F}_*(\widetilde K) \le 0$, де

$$\mathbf{F}_*(\widetilde K) = W + U^\top \mathbf{D}_*(\widetilde K)V + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde K)U + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde K)R_*\mathbf{D}_*(\widetilde K)V,$$

$$W = \dot X + M_*^\top X + XM_* + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n,$$

$$U = B_*^\top X + N_*^\top + R_* K_* C, \quad V = C_*,$$

$$M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C,\ \ \Phi_* = L_*^\top \Phi L_*,\ \ L_*^\top = \big[I_n, C^\top \mathbf{D}^\top(K_*)\big],$$

$$B_* = B(I_m - K_*D)^{-1},\ \ C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C,\ \ D_* = D(I_m - K_*D)^{-1},$$

$$N_* = N(I_m - K_*D)^{-1}, \quad R_* = (I_m - K_*D)^{-1\top} R (I_m - K_*D)^{-1}.$$

Застосовуючи лему про матричну невизначеність 8.10 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde K)$, отримуємо такий результат.

Теорема 4.3 *Нехай для деяких матричних функцій* $X(t) = X^\top(t)$ *і* $K_*(x,t)$ *виконуються співвідношення* (4.18) *і*

$$R_* + D_*^\top Q D_* < P, \tag{4.31}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(X) + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n & XB_* + N_* + C^\top K_*^\top R_* & C_*^\top \\ B_*^\top X + N_*^\top + R_* K_* C & R_* - P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{4.32}$$

де $\mathbf{W}(X) = \dot{X} + M_*^\top X + XM_*$, $\varepsilon_0 > 0$, $x = 0$, $t \geq 0$. *Тоді будь-яке керування* (4.6), (4.16) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x \equiv 0$ *системи* (4.5), *спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x,t) = x^\top X(t) x$ *та оцінку функціонала якості* $J(u, x_0) \le v(x_0, 0) = x_0^\top X(0) x_0$.

Очевидно, що умова (4.17) є наслідком нерівності (4.31). Твердження теореми 4.3 виконується для сім'ї систем (4.5), (4.22), якщо замість (4.32) використати співвідношення

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ijk}(X) + \Phi_k + \varepsilon_0 I_n & XB_{*j} + N_* + C_k^\top K_*^\top R_* & C_{*k}^\top \\ B_{*j}^\top X + N_*^\top + R_* K_* C_k & R_* - P & D_*^\top \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{4.33}$$

де $\quad i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{1, \beta}, \quad k = \overline{1, \gamma}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0,$

$$\mathbf{W}_{ijk}(X) = \dot{X} + M_{ijk}^\top X + XM_{ijk}, \;\; M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_k,$$

$$\Phi_k = L_k^\top \Phi L_k, \;\; L_k^\top = [\, I_n, C_k^\top \mathbf{D}^\top(K_*)\,],$$

$$B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1}, \;\; C_{*k} = (I_l - DK_*)^{-1} C_k.$$

Наслідок 4.3 *Нехай для деяких матриць* $X(t) = X^\top(t)$ *і* $K_*(x,t)$ *виконується система матричних нерівностей* (4.18), (4.31) *і* (4.33). *Тоді будь-яке керування* (4.6), (4.16) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x \equiv 0$ *сім'ї систем* (4.5), (4.22), *спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x,t) = x^\top X(t) x$ *та оцінку функціонала якості* $J(u, x_0) \le v(x_0, 0)$.

Для сім'ї систем (4.5), (4.22), (4.24) виконується аналогічне твердження з використанням строгих матричних нерівностей

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A_i^\top X + XA_i + S + \varepsilon_0 I_n & XB_j + N & C_k^\top \\ B_j^\top X + N^\top & R - P & D_s^\top \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.34)$$

де $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$, $\varepsilon_0 > 0$, $t \geq 0$.

Із (4.34) випливають співвідношення

$$D_s^\top Q D_s < R + D_s^\top Q D_s < P, \quad s = \overline{1,\delta}, \quad t \geq 0.$$

При цьому за лемою 1.22 виконується умова (4.17) при $K_* \equiv 0$.

Наслідок 4.4 *Нехай для деякої матриці* $X(t) = X^\top(t)$ *виконується система матричних нерівностей* (4.18) *і* (4.34). *Тоді будь-яке керування* (4.6), (4.16) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x \equiv 0$ *сім'ї систем* (4.5), (4.22), (4.24), *спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x,t) = x^\top X(t) x$ *та оцінку функціонала якості* $J(u, x_0) \leq v(x_0, 0)$.

На підставі теореми 4.3 та її наслідків можна сформулювати задачі оптимізації системи (4.5), а також сімей систем (4.5), (4.22) і (4.5), (4.22), (4.24), тобто мінімізації максимального значення функціонала якості $\omega = x_0^\top X(0) x_0$ за відповідних обмежень у вигляді матричних нерівностей (див. підрозд. 3.4). При цьому можна використовувати також усереднений за початковим вектором x_0 функціонал (3.103).

4.4 Системи керування механічними об'єктами

У задачах керування механічними об'єктами використовуються лінійні та нелінійні системи диференціальних рівнянь другого порядку:

$$A_2 \ddot{x} + A_1 \dot{x} + A_0 x = B_0 u, \quad y = C_0 x + C_1 \dot{x} + D u, \quad (4.35)$$

де x, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно узагальнених координат, узагальнених швидкостей, керування та вимірюваного виходу, а матричні коефіцієнти A_0, A_1, A_2, B_0, C_0, C_1 і D відповідних розмірів $n \times n$, $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $l \times n$ і $l \times m$ можуть неперервно залежати від x, $\dot{x}$ і t в околі стану рівноваги $x = \dot{x} = 0$ при $t \geq 0$. Надалі припускаємо, що матриця інерції A_2 явно не залежить від часу t, а всі матриці, що залежать від x і $\dot{x}$, визначені в околі $\mathcal{S}_0$ нульового стану рівноваги.

Запишемо систему керування (4.35) як

$$E(z)\,\dot{z} = A(z,t)\,z + B(z,t)\,u, \quad y = C(z,t)\,z + D(z,t)\,u, \qquad (4.36)$$

де $z = [x^\top, \dot{x}^\top]^\top$ — вектор повного стану системи

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \; C = [\,C_0, C_1\,].$$

Побудуємо множину стабілізовних керувань для системи (4.36) у вигляді статичного зворотного зв'язку:

$$u = K(z,t)\,y, \quad K \in \mathcal{K}_* = \left\{K_* + \widetilde{K} : \; \widetilde{K} \in \mathcal{K}\right\}, \qquad (4.37)$$

де $K_* \in \mathbb{R}^{m\times l}$ — матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку, що забезпечує асимптотичну стійкість стану $z \equiv 0$, $\mathcal{K}$ – еліпсоїдальна множина допустимих збурень $\widetilde{K}$ матриці K_* вигляду (3.64), яку визначають матриці $P = P^\top > 0$ і $Q = Q^\top > 0$ відповідних розмірів $m \times m$ і $l \times l$. При цьому вимагаємо, щоб на множині матриць зворотного зв'язку $\mathcal{K}_*$ було визначено оператор $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$, тобто $\mathcal{K}_* \subseteq \mathcal{K}_D$.

Замкнена система (4.36), (4.37) при $K \in \mathcal{K}_D$ має вигляд

$$E(z)\,\dot{z} = M(z,t)\,z, \qquad (4.38)$$

де $M(z,t) = A + B\mathbf{D}(K)C$. Тому твердження теореми 2.7 при $\varphi \equiv 0$ та леми 8.10 дають змогу сформулювати аналоги теорем 4.2, 4.3 та їхні наслідки для класу систем (4.36).

Теорема 4.4 *Нехай для деяких матричних функцій* $X(t) = X^\top(t)$ *і* $K_*(z,t)$ *виконуються співвідношення* (4.18) *і*

$$\begin{bmatrix} E^\top \dot{X} E + M_*^\top X E + E^\top X M_* + \varepsilon_0 I_n & E^\top X B_* & C_*^\top \\ B_*^\top X E & -P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \qquad (4.39)$$

де $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}$, $z = 0$, $t \geq 0$. *Тоді будь-яке керування* (4.37) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $z \equiv 0$ *системи* (4.36) *та спільну функцію Ляпунова* $v(z,t) = z^\top E_0^\top X(t) E_0 z$, *де* $E_0 = E(0)$.

Використовуючи блочне подання невідомої матриці

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3^\top & X_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{4.40}$$

де $X_1 = X_1^\top$, $X_2 = X_2^\top$ і X_3 — блоки розміру $n \times n$, співвідношення (4.39) можна записати в термінах матричних коефіцієнтів вихідної системи (4.35):

$$\Omega(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0*} & C_{0*}^\top \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_2^\top X_2 B_{0*} & C_{1*}^\top \\ \hline B_{0*}^\top X_3^\top & B_{0*}^\top X_2 A_2 & -P & D_*^\top \\ C_{0*} & C_{1*} & D_* & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0. \tag{4.41}$$

Тут

$$\Omega_{11} = \dot{X}_1 + A_{0*}^\top X_3^\top + X_3 A_{0*} + \varepsilon_0 I_n,$$

$$\Omega_{21} = \Omega_{12}^\top = A_2^\top \dot{X}_3^\top + X_1 + A_{1*}^\top X_3^\top + A_2^\top X_2 A_{0*},$$

$$\Omega_{22} = A_2^\top \dot{X}_2 A_2 + A_2^\top X_3^\top + X_3 A_2 + A_2^\top X_2 A_{1*} + A_{1*}^\top X_2 A_2 + \varepsilon_0 I_n,$$

$$A_{0*} = B_0 K_{0*} C_0 - A_0, \quad A_{1*} = B_0 K_{0*} C_1 - A_1, \quad K_{0*} = \mathbf{D}(K_*),$$

$$B_{0*} = B_0 (I_m - K_* D)^{-1}, C_{0*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_0, C_{1*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_1.$$

Припустимо, що значення матричних коефіцієнтів системи (4.35) при $z = 0$ і $t \geq 0$ невизначені:

$$\begin{gathered} A_0 \in \mathrm{Co}\big\{A_{01}, \ldots, A_{0\alpha_0}\big\}, \quad A_1 \in \mathrm{Co}\big\{A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}\big\}, \\ B_0 \in \mathrm{Co}\big\{B_{01}, \ldots, B_{0\beta}\big\}, \\ C_0 \in \mathrm{Co}\big\{C_{01}, \ldots, C_{0\gamma_0}\big\}, \quad C_1 \in \mathrm{Co}\big\{C_{11}, \ldots, C_{1\gamma_1}\big\}. \end{gathered} \tag{4.42}$$

За додаткових обмежень на матриці X і K_* використовуватимемо аналогічні припущення щодо A_2 і D при $z = 0$ і $t \geq 0$:

$$A_2 \in \mathrm{Co}\big\{A_{21}, \ldots, A_{2\alpha_2}\big\}, \tag{4.43}$$

$$D \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_\delta\}. \tag{4.44}$$

Задані набори сталих матриць у (4.42)—(4.44) є вершинами деяких політопів у відповідних просторах матриць. Оскільки всі матричні коефіцієнти системи, крім A_2 і D, входять у вирази блоків Ω лінійно, то умову (4.39) теореми 4.4 можна подати у вигляді системи матричних нерівностей, побудованих у термінах вершин політопів (4.42). За наявності в системі невизначеності типу (4.43) слід використовувати додаткове обмеження $\dot{X}_2 \geq 0$, оскільки блок Ω_{22} містить доданок $A_2^\top \dot{X}_2 A_2$ (див. лему 1.22). Невизначеність типу (4.44) можна застосовувати, наприклад, у випадку $K_* \equiv 0$.

Наслідок 4.5 *Нехай сумісною є система ЛМН зі сталими матрицями* (4.40) *і*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r*} & C_{0p*}^\top \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^\top X_2 B_{0r*} & C_{1q*}^\top \\ \hline B_{0r*}^\top X_3^\top & B_{0r*}^\top X_2 A_{2k} & -P & D_*^\top \\ C_{0p*} & C_{1q*} & D_* & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{4.45}$$

де

$$\Omega_{11} = A_{0irp}^\top X_3^\top + X_3 A_{0irp}, \quad \Omega_{21} = X_1 + A_{1jrq}^\top X_3^\top + A_{2k}^\top X_2 A_{0irp},$$

$$\Omega_{22} = A_{2k}^\top X_3^\top + X_3 A_{2k} + A_{2k}^\top X_2 A_{1jrq} + A_{1jrq}^\top X_2 A_{2k},$$

$$A_{0irp} = B_{0r} K_{0*} C_{0p} - A_{0i}, \quad A_{1jrq} = B_{r0} K_{0*} C_{1q} - A_{1j},$$

$$K_{0*} = \mathbf{D}(K_*), \quad B_{0r*} = B_{0r}(I_m - K_* D)^{-1},$$

$$C_{0p*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_{0p}, \quad C_{1q*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_{1q},$$

$$i = \overline{1, \alpha_0},\ j = \overline{1, \alpha_1},\ k = \overline{1, \alpha_2},\ r = \overline{1, \beta},\ p = \overline{1, \gamma_0},\ q = \overline{1, \gamma_1}.$$

Тоді будь-яке керування (4.37) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $z \equiv 0$ *сім'ї систем* (4.36), (4.42), (4.43).

Наслідок 4.6 *Нехай сумісною є система ЛМН зі сталими матрицями* (4.40) *і*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r} & C_{0p}^\top \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^\top X_2 B_{0r} & C_{1q}^\top \\ \hline B_{0r}^\top X_3^\top & B_{0r}^\top X_2 A_{2k} & -P & D_s^\top \\ C_{0p} & C_{1q} & D_s & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{4.46}$$

де $\Omega_{11} = -A_{0i}^\top X_3^\top - X_3 A_{0i}$, $\Omega_{21} = \Omega_{12}^\top = X_1 - A_{1j}^\top X_3^\top - A_{2k}^\top X_2 A_{0i}$,

$$\Omega_{22} = A_{2k}^\top X_3^\top + X_3 A_{2k} - A_{2k}^\top X_2 A_{1j} - A_{1j}^\top X_2 A_{2k},$$

$i = \overline{1,\alpha_0}$, $j = \overline{1,\alpha_1}$, $k = \overline{1,\alpha_2}$, $r = \overline{1,\beta}$, $p = \overline{1,\gamma_0}$, $q = \overline{1,\gamma_1}$, $s = \overline{1,\delta}$.

Тоді будь-яке керування (4.37) *при* $K_* \equiv 0$ *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $z \equiv 0$ *сім'ї систем* (4.36), (4.42)—(4.44).

Розглянемо систему керування (4.36) з квадратичним функціоналом якості

$$J(u, z_0) = \int_0^\infty \varphi(z, u, t)\, dt. \tag{4.47}$$

Тут

$$z_0 = z(0), \quad \varphi(z, u, t) = \left[z^\top, u^\top\right] \Phi(t) \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} S & N \\ N^\top & R \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_0 & S_2 \\ S_2^\top & S_1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \end{bmatrix},$$

$$R > 0, \quad S \geq N R^{-1} N^\top + \eta\, I_{2n}, \quad \eta > 0, \quad t \geq 0.$$

Нехай потрібно описати множину керувань (4.37), що забезпечують асимптотичну стійкість стану $z \equiv 0$ системи (4.36) та верхню оцінку функціонала (4.47).

Теорема 4.5 *Нехай для деяких матричних функцій* $X(t) = X^\top(t)$ *і* $K_*(z,t)$ *виконуються співвідношення* (4.18) *і*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(X) + \Phi_* + \varepsilon_0 I_{2n} & E^\top X B_* + N_* + C^\top K_*^\top R_* & C_*^\top \\ B_*^\top X E + N_*^\top + R_* K_* C & R_* - P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

де $\mathbf{W}(X) = E^\top \dot{X} E + M_*^\top X E + E^\top X M_*$, $\Phi_* = L_*^\top \Phi L_*$, $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - D K_*)^{-1} C$, $D_* = D(I_m - K_* D)^{-1}$, $R_* = (I_m - K_* D)^{-1\top} R\,(I_m - K_* D)^{-1}$, $N_* = N(I_m - K_* D)^{-1}$, $L_*^\top = \left[I_{2n}, C^\top \mathbf{D}^\top(K_*)\right]$, $z = 0$, $t \geq 0$.

Тоді будь-яке керування (4.37) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $z \equiv 0$ *системи* (4.36), *спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(z,t) = z^\top E_0^\top X(t) E_0 z$, *де* $E_0 = E(0)$, *та оцінку функціонала якості* $J(u, z_0) \leq v(z_0, 0)$.

Наслідок 4.7 *Нехай сумісною є система ЛМН зі сталими матрицями* (4.40) *і*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & U_{0rp}^\top & C_{0p*}^\top \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & U_{1krq}^\top & C_{1q*}^\top \\ \hline U_{0rp} & U_{1krq} & R_* - P & D_*^\top \\ C_{0p*} & C_{1q*} & D_* & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \qquad (4.48)$$

де

$$\Omega_{11} = A_{0irp}^\top X_3^\top + X_3 A_{0irp} + S_0 + C_{0p}^\top K_0^\top N_0^\top +$$

$$+N_0 K_0 C_{0p} + C_{0p}^\top K_0^\top R K_0 C_{0p},$$

$$\Omega_{21} = \Omega_{12}^\top = X_1 + A_{1jrq}^\top X_3^\top + A_{2k}^\top X_2 A_{0irp} + S_2^\top + C_{1q}^\top K_0^\top N_0^\top +$$

$$+N_1 K_0 C_{0p} + C_{1q}^\top K_0^\top R K_0 C_{0p},$$

$$\Omega_{22} = A_{2k}^\top X_3^\top + X_3 A_{2k} + A_{2k}^\top X_2 A_{1jrq} + A_{1jrq}^\top X_2 A_{2k} + S_1 +$$

$$+C_{1q}^\top K_0^\top N_1^\top + N_1 K_0 C_{1q} + C_{1q}^\top K_0^\top R K_{0*} C_{1q},$$

$$A_{0irp} = B_{0r} K_0 C_{0p} - A_{0i},\ A_{1jrq} = B_{r0} K_0 C_{1q} - A_{1j},\ K_0 = \mathbf{D}(K_*),$$

$$U_{0rp} = B_{0r*}^\top X_3^\top + N_{0*}^\top + R_* K_* C_{0p},$$

$$U_{1krq} = B_{0r*}^\top X_2 A_{2k} + N_{1*}^\top + R_* K_* C_{1q}, \quad B_{0r*} = B_{0r}(I_m - K_* D)^{-1},$$

$$C_{0p*} = (I_l - D K_*)^{-1} C_{0p}, \quad C_{1q*} = (I_l - D K_*)^{-1} C_{1q},$$

$$i = \overline{1, \alpha_0},\ j = \overline{1, \alpha_1},\ k = \overline{1, \alpha_2},\ r = \overline{1, \beta},\ p = \overline{1, \gamma_0},\ q = \overline{1, \gamma_1}.$$

Тоді будь-яке керування (4.37) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $z \equiv 0$ *сім'ї систем* (4.36), (4.42), (4.43) *та оцінку функціонала якості* $J(u, z_0) \le \omega$, *де*

$$\omega = \max_{1 \le k \le \alpha_2} \omega_k, \quad \omega_k = z_0^\top Z_k z_0, \quad Z_k = \left[\begin{array}{cc} X_1 & X_3 A_{2k} \\ A_{2k}^\top X_3^\top & A_{2k}^\top X_2 A_{2k} \end{array}\right].$$

У цьому твердженні верхня оцінка функціонала $J(u, z_0) \le \omega$ встановлюється з використанням леми 1.20.

Приклад 4.1 Розглянемо систему керування робота-маніпулятора, круговий рух ланки якого навколо одного з кінців здійснюється за допомогою гнучкого з'єднання ланки та виконавчого механізму (рис. 4.1). Ця система без урахування сил тертя описується у векторно-матричній формі [113]:

$$\dot{x} = A(x)\, x + Bu, \tag{4.49}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mu g h\, \varphi(\theta_1) + k}{J_1} & 0 & \dfrac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{J_2} & 0 & -\dfrac{k}{J_2} & -\dfrac{d}{J_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J_2} \end{bmatrix},$$

де $x = \left[\, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2 \,\right]^\top$, θ_1 і θ_2 — кутові координати відповідно ланки маніпулятора і вала електродвигуна, u — керувальний момент, що генерується електродвигуном, J_1 і J_2 — моменти інерції відповідно ланки маніпулятора та електродвигуна, k — жорсткість передавального механізму, d — коефіцієнт демпфування, μ — маса ланки маніпулятора, h — довжина ланки маніпулятора, g — прискорення вільного падіння, $\varphi(\theta) = sin\,\theta\,/\theta$ — неперервна функція.

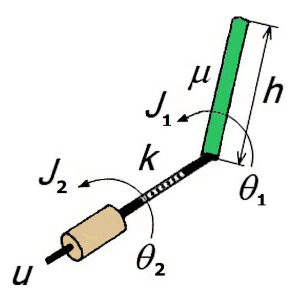


Рис. 4.1. Одноланковий робот-маніпулятор

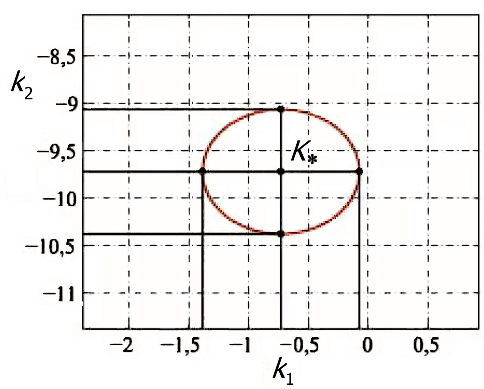


Рис. 4.2. Область коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку $(K - K_*)Q^{-1}(K - K_*)^\top \leq P^{-1}$

Нехай $\mu gh = 5$, $d = 0,1$, $k = 100$, а J_1 і J_2 — невизначені параметри, що набувають значень на інтервалах

$$0,5 \leq J_1 \leq 1,5, \quad 0,1 \leq J_2 \leq 0,5. \tag{4.50}$$

Припустимо, що можна виміряти вектор виходу

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \theta_1 + 0,1\,u \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи два ЛМН (3.23) і (3.26) при $J_1 = 1$ і $J_2 = 0,3$, знайдено матрицю $X > 0$, вектор $K_0 = \big[-0,6799, \ -9,0603 \big]$ і керування (див. лему 3.1)

$$u = K_*\, y, \quad K_* = -\mathbf{D}(-K_0) = \big[-0,7295, \ -9,7213 \big], \tag{4.51}$$

за якого лінійна система

$$\dot{x} = M_*\, x, \quad M_* = A(0) + BK_0C, \quad K_0 = \mathbf{D}(K_*),$$

асимптотично стійка. При цьому $\mathrm{i}(H) = \{2,1,0\}$,

$$\sigma(M_*) = \big\{ -0,6449; -15,0004; -7,4445 \pm 11,8447i \big\}$$

і нульовий стан вихідної нелінійної системи (4.49) також асимптотично стійкий.

Задамо матриці функціонала (4.26):

$$S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad R = 0,2.$$

Система (4.33) складається з чотирьох матричних нерівностей, що відповідають можливим значенням пари (J_1, J_2) на кінцях інтервалів (4.50). За допомогою системи MATLAB знайдено

$$P = 2,33 > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1,0013 & 0,0013 \\ 0,0013 & 1,0013 \end{bmatrix} > 0,$$

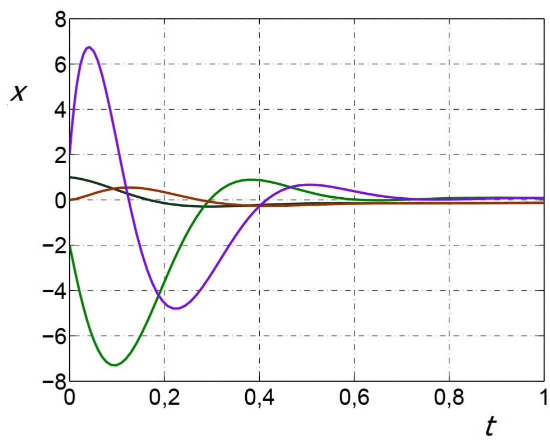


Рис. 4.3. Поведінка розв'язку системи з керуванням $u = K_* y$

$$X = \begin{bmatrix} 955,4267 & -20,1682 & -936,1927 & -31,1040 \\ -20,1682 & 5,2221 & 21,7147 & -0,1949 \\ -936,1927 & 21,7147 & 926,8484 & 31,0357 \\ -31,1040 & -0,1949 & 31,0357 & 2,9214 \end{bmatrix} > 0,$$

що задовольняють строгі нерівності (4.33) при $\varepsilon_0 = 0$.

Таким чином, для всіх значень моментів інерції (4.50) та вектора коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку $K = K_* + \widetilde{K}$ із замкненої області, обмеженої еліпсом (рис. 4.2):

$$(K - K_*)Q^{-1}(K - K_*)^\top = P^{-1},$$

рух робота-маніпулятора в околі нульового стану асимптотично стійкий. При цьому $v(x) = x^\top X x$ є спільною функцією Ляпунова, а значення заданого функціонала якості не перевищує $v(x_0) = 945,8169$. Поведінку розв'язку системи (4.49) з керуванням $u = K_* y$ і початковим вектором $x_0 = \begin{bmatrix}1, & -2, & 0, & 2\end{bmatrix}^\top$ відображено на рис. 4.3.

Розділ 5

Узагальнене H_∞-керування за виходом

У теорії H_∞-оптимізації лінійних систем керування критерієм якості є H_∞-норма матричної передавальної функції, яка характеризує рівень гасіння вхідних сигналів за нульового значення початкового фазового вектора. Цей розділ присвячено методам синтезу стабілізовних законів керування з метою забезпечення бажаної оцінки та мінімізації деякого узагальненого критерію якості J, що характеризує зважений рівень гасіння як зовнішніх (екзогенних), так і початкових збурень. *Стабілізовними* називатимемо регулятори, за яких замкнена система асимптотично стійка за відсутності зовнішніх збурень. Закони керування, що забезпечують верхню оцінку $J < \gamma$, іноді називають субоптимальними або γ-оптимальними.

5.1 Оцінювання рівня гасіння вхідних сигналів та початкових збурень

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x} = A\,x + B\,w, \quad z = C\,x + D\,w, \quad x(0) = x_0, \tag{5.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ і $z \in \mathbb{R}^k$ — вектори відповідно стану, входу та виходу системи. Як w може бути вектор керування або обмежених *зовнішніх збурень*.

Відомо, що критерій якості системи (5.1)

$$J = \sup_{0<\|w\|_2<\infty} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad \|z\|_2^2 = \int_0^\infty z^\top z\,dt, \;\; \|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^\top w\,dt, \tag{5.2}$$

визначений за нульового початкового вектора x_0, збігається з H_∞-нормою матричної *передавальної функції*

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^\top(-i\omega)H(i\omega))}, H(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D,$$

яка характеризує рівень гасіння енергії вхідних сигналів, що проходять через цю систему (див., наприклад, [85, 86, 147, 155]). В задачах керування бажано, щоб ця характеристика була мінімальною.

Оцінка $J < \gamma$, що еквівалентна частотній нерівності $H^\top(-i\omega)H(i\omega) < \gamma^2 I_m$ ($\omega \in \mathbb{R}$), виконується тоді і лише тоді, коли для деякої матриці $X = X^\top > 0$ виконується ЛМН (див., наприклад, [106, 112, 143]):

$$\Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB & C^\top \\ B^\top X & -\gamma I_m & D^\top \\ C & D & -\gamma I_k \end{bmatrix} < 0. \tag{5.3}$$

При цьому матриця A має бути гурвіцевою, а система (5.1) зі структурованою невизначеністю [11]

$$w = \gamma^{-1}\Theta z, \quad \|\Theta\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\Theta^\top\Theta)} \le 1,$$

робастно стійкою зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top X x$.

Узагальнимо критерій якості (5.2) системи (5.1) у вигляді

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \tag{5.4}$$

де

$$\varphi(w, x_0) = \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}},$$

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^\top Q z\, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^\top P w\, dt,$$

$Q = Q^\top > 0$, $P = P^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$ — задані вагові матриці. Припускатимемо, що вектор w обмежений за узагальненою L_2-нормою $\|w\|_P$, а вектор *початкових збурень* x_0 невідомий. Вираз

(5.4) у випадках $x_0 = 0$ і $w(t) \equiv 0$ позначимо відповідно як J_0 і J_1. Очевидно, що $J_0 \le J$ і $J_1 \le J$. Пара векторів (w, x_0), за яких досягається супремум у (5.4), є *найгіршою* у системі (5.1) щодо критерію якості J.

Критерій якості вигляду (5.4) з ваговими матрицями $P = I_m$, $Q = I_k$ і $X_0 = \rho^2 I_n$ використано в [13]. При цьому встановлено, що оцінка $J < \gamma$ виконується тоді і лише тоді, коли система ЛМН (5.3) і $0 < X < \gamma^2\rho^2 I_n$ сумісна.

Означення 5.1 Систему (5.1) називають *неекспансивною*, якщо для будь-якої обмеженої вектор-функції w її вектор виходу z для будь-якого $\tau > 0$ задовольняє умову

$$\int_0^\tau z^\top Q z\, dt \le \int_0^\tau w^\top P w\, dt + x_0^\top X_0 x_0,$$

де Q, P і X_0 — додатно визначені матриці.

Це означення узагальнює відоме поняття неекспансивності системи, введене в окремому випадку $P = I_m$, $Q = I_k$ і $x_0 = 0$ (див., наприклад, [100]). Очевидно, що критерій якості (5.4) неекспансивної системи задовольняє умову $J \le 1$.

Лема 5.1 *Матриця A у системі* (5.1) *гурвіцева і виконується оцінка $J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли ЛМН*

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C^\top QC & XB + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \qquad (5.5)$$

має розв'язок $X = X^\top > 0$. Матриця A гурвіцева і $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісною є система ЛМН (5.5) *і*

$$0 < X < \gamma^2 X_0. \qquad (5.6)$$

Доведення. *Достатність.* Із (5.5) випливає, що матриця A гурвіцева, оскільки $A^\top X + XA < 0$. Побудуємо для системи (5.1) функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X x$ і обчислимо вираз

$$\dot v(x) + z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w = [\, x^\top, w^\top \,]\, \Phi(X) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix},$$

де $\dot{v}(x)$ — похідна такої функції в силу системи (5.1). Після інтегрування цього виразу, враховуючи (5.5), маємо нерівність

$$v(x(\tau)) - v(x_0) + \int_0^\tau (z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w)\, dt \le 0.$$

Переходячи до границі при $\tau \to \infty$, з урахуванням обмеження (5.6) отримаємо $\|z\|_Q^2 \le \gamma^2\bigl(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\bigr)$, тобто $\varphi(w, x_0) \le \gamma$. Окрім того, $\varphi(w, x_0) \le \gamma - \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$. Остання нерівність також є наслідком строгих матричних нерівностей (5.5) і (5.6), які виконуються в разі зменшення γ на досить мале число ε. Отже, $J < \gamma$. Зокрема, при $x_0 = 0$ має бути $J_0 < \gamma$.

Необхідність. Застосовуючи розклади додатно визначених матриць $Q = \widetilde{Q}^\top \widetilde{Q}$, $P = \widetilde{P}^\top \widetilde{P}$ і $X_0 = \widetilde{X}_0^\top \widetilde{X}_0$, перетворимо систему (5.1):

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\,\widetilde{x} + \widetilde{B}\,\widetilde{w}, \quad \widetilde{z} = \widetilde{C}\,\widetilde{x} + \widetilde{D}\,\widetilde{w}, \quad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0,$$

де $\widetilde{x} = \widetilde{X}_0 x$, $\widetilde{z} = \widetilde{Q} z$, $\widetilde{w} = \widetilde{P} w$, $\widetilde{A} = \widetilde{X}_0 A \widetilde{X}_0^{-1}$, $\widetilde{B} = \widetilde{X}_0 B \widetilde{P}^{-1}$, $\widetilde{C} = \widetilde{Q} C \widetilde{X}_0^{-1}$ і $\widetilde{D} = \widetilde{Q} D \widetilde{P}^{-1}$. Якщо $\widetilde{w}$ — вхід цієї системи, то критерій якості (5.4) набуває вигляду

$$\widetilde{J} = \sup_{0 < \|\widetilde{w}\|_{I_m}^2 + \widetilde{x}_0^\top \widetilde{x}_0 < \infty} \frac{\|\widetilde{z}\|_{I_k}}{\sqrt{\|\widetilde{w}\|_{I_m}^2 + \widetilde{x}_0^\top \widetilde{x}_0}}.$$

Якщо $\widetilde{J} < \gamma$, то для деякої матриці $\widetilde{X}$ (див. [13, теорема 1])

$$0 < \widetilde{X} < \gamma^2 I_n, \quad \widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}\widetilde{A} & \widetilde{X}\widetilde{B} & \widetilde{C}^\top \\ \widetilde{B}^\top \widetilde{X} & -\gamma^2 I_m & \widetilde{D}^\top \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & -I_k \end{bmatrix} < 0,$$

або з урахуванням закону інерції

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \ \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB & C^\top \\ B^\top X & -\gamma^2 P & D^\top \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.7)$$

де $X = \widetilde{X}_0^\top \widetilde{X} \widetilde{X}_0$, $\Omega = S^\top \widetilde{\Omega} S$, $S = \operatorname{diag}\bigl\{\widetilde{X}_0, \widetilde{P}, \widetilde{Q}^{-1\top}\bigr\}$. За лемою Шура матричні нерівності (5.5) і $\Omega < 0$ еквівалентні. □

З огляду на лему 5.1 характеристики J_0 і J системи (5.1) можна визначити як розв'язки відповідних оптимізаційних задач:

$$\begin{aligned} J_0 &= \inf\{\gamma : \Phi(X) < 0,\ X > 0\}, \\ J &= \inf\left\{\gamma : \Phi(X) < 0,\ 0 < X < \gamma^2 X_0\right\}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Параметрами оптимізації разом з X можуть бути також вагові матриці P, Q і X_0. Якщо в лемі 5.1 замість (5.5) і (5.6) використати співвідношення $\Phi(X) \leq 0$ і $0 < X \leq \gamma^2 X_0$, то отримаємо аналогічні критерії виконання нестрогих оцінок $J_0 \leq \gamma$ і $J \leq \gamma$.

Зауваження 5.1 Якщо в системі (5.1) w — структурована невизначеність або керування у вигляді лінійного зворотного зв'язку за виходом:

$$w = \gamma^{-1}\Theta z, \quad \Theta^\top P \Theta \leq Q, \tag{5.9}$$

то за умов $\Phi(X) < 0$ і $X > 0$ ця система робастно стійка і має спільну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X x$.

Таке твердження є наслідком теореми 3.6 для класу систем (5.1). Його можна встановити також, виходячи із (5.5) і (5.9). Справді, оскільки $D^\top \Theta^\top P \Theta D \leq D^\top Q D < \gamma^2 P$, то $\rho(\Theta D) < \gamma$ і вектор w в (5.9) подається у вигляді $w = Kx$, де $K = (\gamma I_m - \Theta D)^{-1}\Theta C$. Тоді

$$[\,x^\top, w^\top\,]\,\Phi(X) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = x^\top Y x < 0, \quad x \neq 0,$$

$$Y = (A + BK)^\top X + X(A + BK) + S < 0,$$

$$S = \gamma^2 C^\top (\gamma I_m - \Theta^\top D^\top)^{-1}(Q - \Theta^\top P \Theta)(\gamma I_m - D\Theta)^{-1} C \geq 0.$$

Оскільки $\Theta^\top P \Theta \leq Q$, то за теоремою Ляпунова матриця $A + BK$ замкненої системи (5.1) гурвіцева.

Зазначимо також, що на множині векторних функцій (5.9) функціонал $\varphi(w, x_0)$ в (5.4) набуває мінімального значення, якщо $\Theta^\top P \Theta = Q$. Так, у разі $k \leq m$ маємо $\varphi(w, 0) = \gamma$, якщо

$$\Theta = (\sqrt{P})^{-1} E \sqrt{Q}, \quad E = \begin{cases} I_m, & k = m, \\ \left[\, I_m,\ 0 \,\right]^\top, & k < m. \end{cases}$$

Зауваження 5.2 Згідно з лемою Шура умова (5.5) еквівалентна матричній нерівності Ріккаті

$$A_1^\top X + XA_1 + XR_1X + Q_1 < 0, \tag{5.10}$$

де $A_1 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $Q_1 = C^\top\big(Q + QDR^{-1}D^\top Q\big)C$, $R_1 = BR^{-1}B^\top$ і $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$. Якщо пара матриць (A, B) керована, пара матриць (A, C) спостережувана і нерівність (5.10) сумісна, то відповідне матричне рівняння Ріккаті

$$A_1^\top X + XA_1 + XR_1X + Q_1 = 0 \tag{5.11}$$

має розв'язки X_- і X_+ такі, що $\sigma(A_1 + R_1X_\pm) \subset \mathbb{C}^\pm$, $0 < X_- < X_+$ і кожний розв'язок нерівності (5.10) належить інтервалу $X_- < X < X_+$ (див. [106, 155]). Окрім того, якщо $J < \gamma$ $(J \le \gamma)$ і $X = X_-$ задовольняє рівняння (5.11), то $X < \gamma^2 X_0$ $(X \le \gamma^2 X_0)$. Справді, поклавши $v(x) = x^\top Xx$ і

$$w = K_* x, \quad K_* = R^{-1}\big(B^\top X + D^\top QC\big), \tag{5.12}$$

отримаємо рівність $\dot v(x) + z^\top Qz - \gamma^2 w^\top Pw = 0$, де $\dot v(x)$− похідна функції $v(x)$ в силу системи (5.1), при цьому $\sigma(A + BK_*) \subset \mathbb{C}^-$. Після інтегрування цієї рівності на інтервалі $[0, \infty)$ за умови $J < \gamma$ отримаємо $\|z\|_Q^2 - \gamma^2\|w\|_P^2 = x_0^\top Xx_0 < \gamma^2 x_0^\top X_0x_0$ для будь-якого $x_0 \ne 0$. Інакше $\|z\|_Q^2 \ge \gamma^2(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0x_0)$ для деяких w і x_0, тобто $J \ge \gamma$. У випадку $J = \gamma$ за умов (5.11) і (5.12) $X \le \gamma^2 X_0$, а рівності $x_0^\top Xx_0 = \gamma^2 x_0^\top X_0x_0$ і $(X - \gamma^2 X_0)x_0 = 0$ еквівалентні і виконуються для деякого $x_0 \ne 0$. При цьому $\|z\|_Q^2 = J^2(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0x_0)$, тобто в (5.4) досягається супремум.

Отже, вирази (5.12), де $x = x(t, x_0)$ — розв'язок системи $\dot x = (A + BK_*)x$, і будь-який вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(X - \gamma^2 X_0)$, що відповідають *стабілізовному* розв'язку $X = X_-$ рівняння Ріккаті (5.11) при $\gamma = J$, представляють *найгірші* зовнішні та початкові збурення в системі (5.1) щодо критерію якості J. У випадку фіксованого вектора $x_0 = 0$ за умов (5.11) і (5.12) при $X = X_-$ і $\gamma = J_0$ маємо рівність $\|z\|_Q = J_0\|w\|_P$, тобто вектор збурень (5.12) є найгіршим щодо критерію якості J_0.

Можна встановити, що вектор (5.12) належить множині збурень (5.9), якщо система співвідношень $\Theta(C + DK_*) = \gamma K_*$ і $\Theta^\top P\Theta \le Q$ сумісна щодо Θ.

Розглянемо систему (5.1) за відсутності вхідних сигналів:

$$\dot{x} = Ax, \quad z = Cx, \quad x(0) = x_0, \tag{5.13}$$

і критерій якості J_1, що характеризує зважений рівень гасіння початкових збурень у системі, використовуючи співвідношення

$$A^\top X + XA + C^\top QC \leq 0, \tag{5.14}$$

$$A^\top X + XA + C^\top QC = 0. \tag{5.15}$$

Лема 5.2 *Нехай матриця A гурвіцева. Тоді $J_1 \leq \gamma$, якщо сумісна система ЛМН* (5.14) *і* $0 \leq X \leq \gamma^2 X_0$. *При цьому $J_1 < \gamma$, якщо $0 \leq X < \gamma^2 X_0$. Навпаки, якщо $J_1 \leq \gamma$ ($J_1 < \gamma$), то матричне рівняння* (5.15) *має розв'язок X такий, що $0 \leq X \leq \gamma^2 X_0$* ($0 \leq X < \gamma^2 X_0$).

Доведення леми 5.2 проводиться оцінюванням виразу $\dot{v}(x) + z^\top Qz$ (див. лему 5.1). За умови спостережуваності системи (5.13) рівняння Ляпунова (5.15) має розв'язок $X > 0$.

5.2 Лінійні системи з керованими та спостережуваними виходами

Розглянемо *лінійну систему керування*

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A\,x + B_1\,w + B_2\,u, \quad x(0) = x_0,\\
&z = C_1\,x + D_{11}\,w + D_{12}\,u,\\
&y = C_2\,x + D_{21}\,w + D_{22}\,u,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

де вектори: $x \in \mathbb{R}^n$ — стан, $u \in \mathbb{R}^m$ — керування, $w \in \mathbb{R}^s$ — збурення, $y \in \mathbb{R}^l$ — спостережуваний вихід, $z \in \mathbb{R}^k$ — керований вихід; всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі. Нехай J — критерій якості цієї системи вигляду (5.4) стосовно керованого виходу z. Задача полягає в побудові стабілізовних J-*оптимальних* регуляторів, що забезпечують замкненій системі асимптотичну стійкість і мінімальне значення J. Пошук J_0- та J-оптимальних регуляторів можна здійснювати на підставі досягнення відповідних оцінок $J_0 < \gamma$ та $J < \gamma$ за мінімально можливих значень γ.

5.2.1 Статичні регулятори за виходом

Вивчимо умови досягнення оцінки $J < \gamma$ за допомогою регулятора

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times l}. \tag{5.17}$$

За умови

$$\det(I_m - KD_{22}) \neq 0 \tag{5.18}$$

замкнена система має вигляд

$$\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad z = C_* x + D_* w, \tag{5.19}$$

де $A_* = A + B_2 K_0 C_2$, $B_* = B_1 + B_2 K_0 D_{21}$, $C_* = C_1 + D_{12} K_0 C_2$, $D_* = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21}$ і $K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} K$. При цьому

$$K = K_0 (I_l + D_{22} K_0)^{-1}. \tag{5.20}$$

Подамо блочну нерівність в (5.7) для системи (5.19) як ЛМН щодо K_0:

$$\begin{bmatrix} A_*^\top X + X A_* & X B_* & C_*^\top \\ B_*^\top X & -\gamma^2 P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = L_0^\top K_0 R_0 + R_0^\top K_0^\top L_0 + \Omega < 0, \tag{5.21}$$

де $R_0 = \begin{bmatrix} C_2, D_{21}, 0_{l \times k} \end{bmatrix}$, $L_0 = \begin{bmatrix} B_2^\top, D_{12}^\top, 0_{m \times s} \end{bmatrix} \widetilde{X}$,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ця нерівність має розв'язок K_0 тоді і лише тоді, коли виконуються умови $W_{R_0}^\top \Omega W_{R_0} < 0$ і $W_{L_0}^\top \Omega W_{L_0} < 0$ (див. лему 8.6). Оскільки

$$W_{R_0} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{L_0} = \widetilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то ці умови з урахуванням леми Шура набувають вигляду

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C_1^\top Q C_1 & XB_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{5.22}$$

$$W_L^\top \left[\begin{array}{cc} AY + YA^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & YC_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{array} \right] W_L < 0, \tag{5.23}$$

де $R = \left[C_2, D_{21} \right]$, $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top \right]$. При цьому $X > 0$ і $XY = \gamma^2 I_n$, що можна переписати у вигляді (див. формули (1.12) і (1.13))

$$W = \left[\begin{array}{cc} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{array} \right] \geq 0, \quad \operatorname{rank} W = n. \tag{5.24}$$

Отже, на базі лем 5.1 і 8.6 маємо таке твердження.

Теорема 5.1 *Для системи* (5.16) *існує стабілізовний регулятор* (5.17)*, що забезпечує оцінку* $J < \gamma$*, тоді і лише тоді, коли система співвідношень* (5.6) *і* (5.22)–(5.24) *сумісна. Матрицю такого регулятора можна побудувати у вигляді* (5.20)*, де* K_0 *— розв'язок ЛМН* (5.21).

Наведемо наслідки леми 5.1 і теореми 5.1 за додаткових умов

$$C_2 = I_n, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P. \tag{5.25}$$

Наслідок 5.1 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *для системи* (5.16) *існує стабілізовний статичний регулятор за станом* $u = Kx$*, що забезпечує оцінку* $J < \gamma$*;*

2) *існує матриця* $Y > X_0^{-1}$*, що задовольняє ЛМН* (5.23)*;*

3) *існують матриці* $Y > X_0^{-1}$ *і* Z*, що задовольняють ЛМН*

$$\left[\begin{array}{ccc} \gamma^2 (AY + YA^\top + B_2 Z + Z^\top B_2^\top) & \gamma^2 B_1 & YC_1^\top + Z^\top D_{12}^\top \\ \gamma^2 B_1^\top & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -Q^{-1} \end{array} \right] < 0. \tag{5.26}$$

У разі виконання твердження 3 матрицю регулятора можна знайти у вигляді $K = ZY^{-1}$.

Еквівалентність тверджень 1 і 2 є наслідком теореми 5.1, оскільки за умов (5.25) $W_R = \left[0, I_s \right]^\top$ і нерівність (5.22) не залежить від X. Матрична нерівність (5.26) у твердженні 3 є наслідком множення першої блочної стрічки зліва і першого блочного стовпця справа в (5.21) на $Y = \gamma^2 X^{-1}$ за умов (5.25) і $K = ZY^{-1}$.

5.2.2 Динамічні регулятори

Вивчимо умови досягнення оцінки $J < \gamma$ за допомогою динамічного регулятора порядку r:

$$\dot{\xi} = Z\,\xi + V\,y, \quad u = U\,\xi + K\,y, \quad \xi(0) = 0, \tag{5.27}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану регулятора, Z, V, U і K — невідомі матриці відповідних розмірів $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ і $m \times l$. За умови (5.18) замкнена система (5.16), (5.27) набуває вигляду

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_*\,\widehat{x} + \widehat{B}_*\,w, \quad z = \widehat{C}_*\,\widehat{x} + \widehat{D}_*\,w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{5.28}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_* = \begin{bmatrix} A + B_2K_0C_2 & B_2U_0 \\ V_0C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{B}_* = \begin{bmatrix} B_1 + B_2K_0D_{21} \\ V_0D_{21} \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{C}_* = \big[C_1 + D_{12}K_0C_2,\; D_{12}U_0\big] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{D}_* = D_{11} + D_{12}K_0D_{21} = \widehat{D}_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},\; \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},\; \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},\; \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},\; \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \big[\,C_1, 0_{k\times r}\,\big], \quad \widehat{D}_{11} = D_{11}, \quad \widehat{D}_{12} = \big[\,D_{12}, 0_{k\times r}\,\big].$$

Тут невідомими є блоки матриці $\widehat{K}_0$:

$$K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K, \quad U_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - D_{22}K)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD_{22}(I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

які однозначно визначають шукані матриці регулятора (5.27):

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0D_{22})^{-1}K_0,\;\; U = (I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0, \\ V = V_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1},\; Z = Z_0 - V_0D_{22}(I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0. \end{gathered} \tag{5.29}$$

Позначимо симетричні блокові матриці порядку $n + r$ як

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \ \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^\top \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \ \widehat{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 & X_{01}^\top \\ X_{01} & X_{02} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

і визначимо критерій якості $\widehat{J}$ системи (5.28) вигляду (5.4) з ваговими матрицями P, Q і $\widehat{X}_0$. Оскільки $\xi_0 = 0$, то $\widehat{J}$ залежить лише від першого діагонального блоку $X_0 > 0$ матриці $\widehat{X}_0$ і його значення збігається з J.

За лемою 5.1 матриця $\widehat{A}_*$ гурвіцева і $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли для деякої матриці $\widehat{X}$ виконуються співвідношення $0 < \widehat{X} < \gamma^2 \widehat{X}_0$ і

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}_*^\top \widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}_* + \widehat{C}_*^\top Q \widehat{C}_* & \widehat{X}\widehat{B}_* + \widehat{C}_*^\top Q \widehat{D}_* \\ \widehat{B}_*^\top \widehat{X} + \widehat{D}_*^\top Q \widehat{C}_* & \widehat{D}_*^\top Q \widehat{D}_* - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0. \tag{5.31}$$

Використовуючи лему Шура, запишемо (5.31) у вигляді ЛМН щодо $\widehat{K}_0$:

$$\widehat{L}^\top \widehat{K}_0 \widehat{R} + \widehat{R}^\top \widehat{K}_0^\top \widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{5.32}$$

де

$$\widehat{R} = \left[\widehat{R}_1, 0_{l+r\times k}\right], \quad \widehat{R}_1 = \left[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}\,\right],$$

$$\widehat{L} = \left[\widehat{L}_1, 0_{m+r\times s}\right] \widetilde{X}, \quad \widehat{L}_1 = \left[\,\widehat{B}_2^\top, \widehat{D}_{12}^\top\,\right],$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widehat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A} & \widehat{X}\widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^\top \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Якщо ця нерівність сумісна, то завжди можна вибрати її розв'язок $\widehat{K}_0$ так, щоб $\det(I_m + K_0 D_{22}) \neq 0$. Оскільки

$$W_{\widehat{R}} = \begin{bmatrix} W_{\widehat{R}_1} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = \widetilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_{\widehat{L}_1} & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то за лемою 8.6 існування розв'язку $\widehat{K}_0$ матричної нерівності (5.32) еквівалентне співвідношенням

$$W_{\widehat{R}_1}^\top \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A} + \widehat{C}_1^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{X}\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^\top Q D_{11} \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} + D_{11}^\top Q \widehat{C}_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_{\widehat{R}_1} < 0,$$

$$W_{\widehat{L}_1}^\top \left[\begin{array}{cc} \widehat{A}\widehat{Y} + \widehat{Y}\widehat{A}^\top + \widehat{B}_1 P^{-1}\widehat{B}_1^\top & \widehat{Y}\widehat{C}_1^\top + \widehat{B}_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ \widehat{C}_1\widehat{Y} + D_{11}P^{-1}\widehat{B}_1^\top & D_{11}P^{-1}D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{array} \right] W_{\widehat{L}_1} < 0,$$

де $\widehat{Y} = \gamma^2 \widehat{X}^{-1}$. Далі, використовуючи блокові вирази

$$W_{\widehat{R}_1} = \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_s & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} W_R \\ 0_{r \times r_1} \end{array} \right], \; W_{\widehat{L}_1} = \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_k & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} W_L \\ 0_{r \times l_1} \end{array} \right],$$

де $R = \left[C_2, D_{21} \right]$, $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top \right]$, $r_1 = n + s - \operatorname{rank} R$ і $l_1 = n + k - \operatorname{rank} L$, запишемо отримані співвідношення у вигляді (5.22) і (5.23), де X і Y — перші діагональні блоки матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$. При цьому за лемою 8.3 для заданих матриць $X > 0$ і $Y > 0$ існують блокові матриці $\widehat{X} > 0$ і $\widehat{Y} > 0$ вигляду (5.30) такі, що $\widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}$, тоді і лише тоді, коли

$$W = \left[\begin{array}{cc} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{array} \right] \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{5.33}$$

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 5.2 *Для системи* (5.16) *існує стабілізовний динамічний регулятор* (5.27)*, що забезпечує оцінку* $J < \gamma$*, тоді і лише тоді, коли система співвідношень* (5.6)*,* (5.22)*,* (5.23) *і* (5.33) *сумісна щодо* $X = X^\top > 0$ *і* $Y = Y^\top > 0$*. Матриці такого регулятора можна визначити за допомогою співвідношень* (5.29) *і* (5.32).

Зауваження 5.3 Враховуючи структуру матричних коефіцієнтів у (5.28), систему (5.16) з динамічним регулятором (5.27) формально можна подати аналогічною системою в розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}} &= \widehat{A}\,\widehat{x} + \widehat{B}_1\, w + \widehat{B}_2\, \widehat{u}, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \\ z &= \widehat{C}_1\, \widehat{x} + \widehat{D}_{11}\, w + \widehat{D}_{12}\, \widehat{u}, \\ \widehat{y} &= \widehat{C}_2\, \widehat{x} + \widehat{D}_{21}\, w \end{aligned}$$

зі статичним регулятором $\widehat{u} = \widehat{K}_0 \widehat{y}$. Тут всі матричні коефіцієнти визначені в (5.28) і

$$\widehat{x} = \left[\begin{array}{c} x \\ \xi \end{array} \right], \quad \widehat{x}_0 = \left[\begin{array}{c} x_0 \\ 0 \end{array} \right], \quad \widehat{y} = \left[\begin{array}{c} y - D_{22}u \\ \xi \end{array} \right], \quad \widehat{u} = \left[\begin{array}{c} u \\ \dot{\xi} \end{array} \right],$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix} = (I_{m+r} - \widehat{K}\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K}, \quad \widehat{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{m+r} + \widehat{K}_0\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K}_0.$$

Тому теорему 5.2 можна встановити як наслідок теореми 5.1.

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (5.27), що задовольняє теорему 5.2:

1) обчислення матриць W_R і W_L, де $R = \begin{bmatrix} C_2, D_{21} \end{bmatrix}$ і $L = \begin{bmatrix} B_2^\top, D_{12}^\top \end{bmatrix}$;

2) знаходження матриць $X = X^\top > 0$ і $Y = Y^\top > 0$, які задовольняють співвідношення (5.6), (5.22), (5.23) і (5.33);

3) побудова розкладу $Z = Y - \gamma^2 X^{-1} = S^\top S$, де $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\ker S = \ker Z$, та формування блокової матриці

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad X_1 = \frac{1}{\gamma}SX, \quad X_2 = \frac{1}{\gamma^2}SXS^\top + I_r;$$

4) розв'язування лінійної матричної нерівності (5.32) щодо $\widehat{K}_0$ за умови $\det(I_m + K_0 D_{22}) \neq 0$;

5) обчислення матриць регулятора за формулами (5.29).

Зазначимо, що теореми 5.1 і 5.2 без використання обмеження $X < \gamma^2 X_0$ дають критерії існування та методи побудови регуляторів, що забезпечують оцінку $J_0 < \gamma$ та асимптотичну стійкість відповідних замкнених систем (5.19) і (5.28). Побудова динамічних регуляторів порядку $r \geq n$, що задовольняють теорему 5.2, зводиться до розв'язування системи ЛМН. У цьому випадку рангове обмеження в (5.33) виконується автоматично.

Матричні нерівності (5.22) і (5.23) можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} W_R^\top & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} A^\top X + XA & XB_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ \hline C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_L^\top & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} AY + YA^\top & YC_1^\top & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma^2 Q^{-1} & D_{11} \\ \hline B_1^\top & D_{11}^\top & -P \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0.$$

Враховуючи лінійну залежність наведених виразів від матричних коефіцієнтів A, B_1, C_1 і D_{11}, можна сформулювати аналоги теореми 5.2 та відповідні алгоритми побудови регуляторів для системи (5.16), у яких враховуються невизначеності

$$A \in \mathrm{Co}\{A^1, \ldots, A^{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, \ldots, B_1^{\nu_2}\},$$

$$C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, \ldots, C_1^{\nu_3}\}, \quad D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \ldots, D_{11}^{\nu_4}\}.$$

При цьому замість (5.22) і (5.23) слід використати систему аналогічних матричних нерівностей, сформованих для всіх можливих наборів вершин зазначених політопів. Крім того, такий підхід до розв'язування задачі робастного H_∞-керування можна застосувати, наприклад, для класу псевдолінійних систем вигляду (5.16), коли значення матричних коефіцієнтів $A(x)$, $B_1(x)$, $C_1(x)$ і $D_{11}(x)$, неперервно залежних від $x \in \mathbb{R}^n$, належать заданим політопам (див. підрозд. 5.4).

Приклад 5.1 *Розглянемо задачу керування поздовжнім рухом літака за умов невизначених вітрових збурень та шумів вимірювань. За таких умов можливі відхилення повітряної швидкості та висоти польоту від заданих значень, що визначаються глісадою (траєкторією зниження літального апарату). Задача регулятора полягає у підтримці заданих значень повітряної швидкості та висоти польоту в режимі посадки. Система керування літака ТУ-154 апроксимується лінійною моделлю* (5.16), *де* [95]

$$A = \begin{bmatrix} -0,0608 & -0,0841 & 0 & -0,0869 & 0 & 0,0904 \\ 0,2187 & -0,6218 & 0,10815 & 0,72345 & 0 & 0,0036 \\ 0,0053 & 0,5221 & -1,59015 & -1,55495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0471 & 1,2437 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4000 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,9989 & 0,0471 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0378 & -0,8019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,1236 & 0 \\ 1,1804 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} D_{11} = 0_{4\times 5}, \\ D_{22} = 0_{2\times 2}. \end{array}$$

Компонентами векторів $x \in \mathbb{R}^6$, $u \in \mathbb{R}^2$, $w \in \mathbb{R}^5$, $z \in \mathbb{R}^4$ і $y \in \mathbb{R}^2$ є: x_1 — відхилення повітряної швидкості літака; x_2 — відхилення кута нахилу траєкторії в повітряній системі координат; x_3 — відхилення кутової швидкості щодо осі z; x_4 — відхилення кута тангажа; x_5 — відхилення висоти польоту літака; x_6 — відхилення сили тяги двигунів, напрямок якої збігається з поздовжньою віссю літака; u_1 — керування, що формує відхилення руля висоти літака; u_2 — відхилення сектора газу від заданого значення; w_1— вертикальна складова швидкості вітру; w_2 і w_3 — горизонтальна та вертикальна складові прискорення вітру; w_4 і w_5 — шуми вимірювань компонентів вектора y. Вектори керованого та спостережуваного виходів мають вигляд

$$z = \begin{bmatrix} x_1 & x_5 & u_1 & u_2 \end{bmatrix}^\top, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 + w_4 & x_5 + w_5 \end{bmatrix}^\top.$$

Для проведення чисельних експериментів вагові матриці критерію якості (5.4) обрані у вигляді

$$P = \mathrm{diag}\{p_1, p_1, p_1, p_2, p_2\}, \quad Q = \mathrm{diag}\{q_1, q_1, q_2, q_2\},$$

$$X_0 = \mathrm{diag}\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6\},$$

де $\chi_1 = \chi_5 = 1,\ \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = \chi_6 = 0,1$. Діагональні коефіцієнти χ_1 і χ_5 матриці X_0 характеризують рівні компенсації початкових відхилень повітряної швидкості x_1 та висоти польоту x_5 літака.

За допомогою наведеного вище алгоритму проведено низку чисельних експериментів пошуку матриць J-оптимального динамічного регулятора (5.27) за різних значень p_i і q_i $(i = 1, 2)$. У табл. 5.1 наведено значення параметра γ, критеріїв якості J і J_0, спектрального запасу стійкості α та часу перехідного процесу T замкненої системи, що відповідають наближено обчисленим оптимальним значенням матриць регулятора. Характеристики J, J_0, α і T

обчислені з використанням відповідних формул (5.8) і

$$\alpha = -\max\left\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\widehat{A}_*)\right\}, \quad T = \min\left\{\tau : \|x(t, x_0)\| \le \varepsilon,\, t \ge \tau\right\},$$

де $\varepsilon = 0,05$, $\widehat{A}_*$ — матриця замкненої системи (5.28), а $x(t, x_0)$ — розв'язок даної системи за найгірших збурень $w(t)$ і x_0 щодо J (див. зауваження 5.2).

Таблиця 5.1. Результати розрахунків

№	p_1	p_2	q_1	q_2	γ	J	J_0	α	T
1	1,0	1,0	1,0	1,0	12,019	12,01797	11,65332	0,20337	65,36013
2	1,0	0,1	1,0	1,0	13,187	13,18651	12,59553	0,19779	51,35900
3	1,0	1,0	1,0	0,1	7,662	7,66145	6,68196	0,36479	13,87644
4	1,0	0,1	1,0	0,1	9,308	9,30780	8,16540	0,34489	14,51849
5	0,1	1,0	1,0	0,1	13,011	13,01070	12,99010	0,40606	34,18908
6	0,1	0,1	1,0	0,1	14,102	14,10179	14,09613	0,39716	32,17518
7	1,0	0,1	0,1	0,1	4,170	4,16994	3,96805	0,19964	44,40183
8	1,0	1,0	0,1	0,1	3,801	3,80048	3,69053	0,20903	56,41654

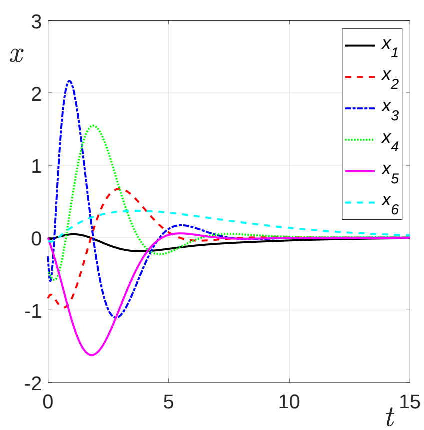


Рис. 5.1. Поведінка керованої системи за найгірших збурень щодо J

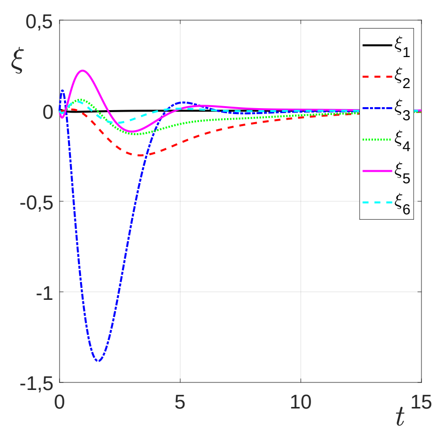


Рис. 5.2. Поведінка динамічного регулятора за найгірших збурень щодо J

Для варіанту розрахунків, зазначеного номером 3 у табл. 5.1,

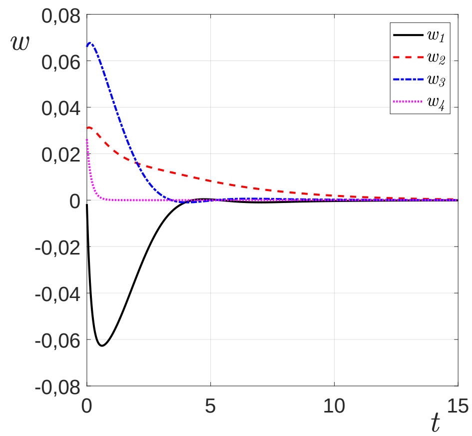


Рис. 5.3. Найгірше зовнішнє збурення щодо J

знайдено матриці J-оптимального регулятора

$$K = \begin{bmatrix} 2,00224 & -20,91373 \\ -0,04429 & -2,27113 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -0,14051 & 0,66498 \\ 6,81171 & -0,11046 \\ -1,04834 & 5,75433 \\ 0,07826 & -0,66646 \\ 0,19044 & -2,22346 \\ 0,15651 & -0,83033 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -1,09445 & -1,95884 & 26,91337 & 8,01274 & 35,84391 & -15,89065 \\ -0,09898 & -1,88634 & 2,64107 & 1,84694 & 3,79970 & -1,79444 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -33,02251 & 0,13053 & -0,79185 & -0,19795 & -1,18298 & 0,44663 \\ -0.05389 & -3,37601 & 0,60310 & -6,04601 & 1,29944 & 3,05591 \\ 0,43450 & 0,70700 & -7,73680 & -2,42988 & -12,29414 & 4,85898 \\ -0,02602 & 0,07003 & 0,91097 & -0,33807 & 0,74987 & 0,49858 \\ -0,09876 & -0,22528 & 2,94579 & 0,58841 & 2,30890 & 0,26665 \\ -0,05314 & -0,10772 & 1,12957 & 0,12752 & 0,87089 & -1,13930 \end{bmatrix},$$

найгірший нормований початковий вектор

$$x_0 = -\begin{bmatrix} 0,02772 & 0,83907 & 0,25827 & 0,47628 & 0,00168 & 0,04065 \end{bmatrix}^\top$$

і вектор найгіршого збурення $w = \widehat{K}_* \widehat{x}$ щодо критерію якості J,

де

$$\widehat{K}_*^\top = \begin{bmatrix} 0,00827 & -0,10591 & -0,01678 & -0,00179 & -0,41576 \\ 0,01179 & -0,02983 & -0,05763 & -0,01689 & -0,41654 \\ -0,00968 & -0,00149 & -0,01397 & -0,00916 & -0,00026 \\ -0,01314 & -0,00393 & -0,02826 & -0,02011 & -0,03471 \\ 0,17284 & -0,00870 & -0,00907 & 0,06695 & 0,94404 \\ 0,00063 & -0,01525 & -0,00196 & -0,00515 & 0,00053 \\ 0,00048 & 0,00049 & 0,00025 & -0,01274 & 0,15843 \\ 0,00720 & 0,00480 & 0,00281 & 0,00348 & 0,22899 \\ -0,20181 & -0,01302 & -0,04304 & -0,10585 & -1,37582 \\ -0,05451 & -0,01068 & -0,01530 & -0,04994 & -0,51610 \\ -0,16784 & -0,06470 & -0,06144 & -0,06735 & -3,29944 \\ 0,04043 & 0,01715 & 0,01806 & -0,04280 & 1,80930 \end{bmatrix}.$$

Поведінку компонент x і ξ розв'язку $\widehat{x}$ замкненої системи (5.28) за наведених значень коефіцієнтів регулятора та найгірших зовнішніх і початкових збурень відображено на рис. 5.1 і 5.2, а на рис. 5.3 відображені компоненти найгіршого зовнішнього збурення $w(t)$.

5.3 Лінійні дескрипторні системи

5.3.1 Канонічна форма Веєрштрасса

Розглянемо лінійну дескрипторну систему:

$$E\,\dot{x} = A\,x + B\,w, \quad z = C\,x + D\,w, \quad x(0) = x_0, \tag{5.34}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^s$ і $z \in \mathbb{R}^k$ — вектори відповідно стану, входу та виходу системи, E, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів. Припускаємо, що в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ регулярна і стійка, тобто $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ і $\sigma(F) \subset \mathbb{C}^-$. У випадку $\rho = \operatorname{rank} E < n$ цю систему можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = A_1\,x_1 + B_1\,w, \quad N\,\dot{x}_2 = x_2 + B_2\,w, \\ &z = C_1\,x_1 + C_2\,x_2 + D\,w, \end{aligned} \tag{5.35}$$

де $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$,

$$x = R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ x_0 = R\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix},\ LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ CR = \begin{bmatrix} C_1, C_2 \end{bmatrix},$$

L і R — невироджені матриці перетворення в'язки $F(\lambda)$ до *канонічної форми Веєрштрасса* [21]:

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array}\right]. \tag{5.36}$$

Власні значення матриці A_1 в (5.36) утворюють скінченний спектр в'язки $\sigma(F)$, а N — деяка нільпотентна матриця індексу ν ($N^\nu = 0$). При цьому система (5.35) має r скінченних динамічних мод, $n-\rho$ нединамічних мод і $\rho - r$ імпульсних мод [101].

Загальний розв'язок першої *динамічної* підсистеми в (5.35)

$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_{01} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau.$$

Якщо вектор-функція $w(t)$ кусково-неперервно диференційована ν разів, то загальний розв'язок *алгебричної* підсистеми є таким [17, 104]:

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{\nu-1} \delta^i(t) N^{i+1} x_2(0) - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 w^{(i)}(t),$$

де $\delta(t)$ — δ-функція Дірака. Даний вираз при $\nu > 1$ містить імпульсні складові.

Означення 5.2 Регулярну в'язку матриць $F(\lambda)$ за відсутності імпульсних мод ($\nu = 1$) називають *неімпульсною*. В'язку матриць $F(\lambda)$ називають *допустимою*, якщо вона регулярна, стійка і неімпульсна. Дескрипторну систему (5.34) називають *стійкою*, *неімпульсною* та *допустимою*, якщо в'язка матриць $F(\lambda)$ відповідно стійка, неімпульсна та допустима.

Позначимо матриці:

$$Z = R \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L, \; E_1 = \begin{cases} E, & \nu \le 1, \\ EZE, & \nu > 1, \end{cases} \; E_2 = \begin{cases} E, & \nu \le 2, \\ EZE, & \nu > 2. \end{cases}$$

Матриця Z є єдиним розв'язком максимального рангу r алгебричної системи (див. підрозд. 1.4) $AZE = EZA$, $Z = ZEZ$, а числа r і ν можна визначити як

$$r = \operatorname{rank} \Delta_\alpha^\nu, \quad \nu = \min\left\{i: \; \operatorname{rank} \Delta_\alpha^i = \operatorname{rank} \Delta_\alpha^{i+1}, \, i = 0, 1, \dots \right\},$$

де $\Delta_\alpha = F^{-1}(\alpha)E$ і $\alpha \notin \sigma(F)$. Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ є неімпульсною тоді і лише тоді, коли $EZE = E$ [74] або [105]

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \rho. \tag{5.37}$$

Якщо виконуються рангові умови (5.37) або

$$\operatorname{rank}\big[\, E_2, B \,\big] = \operatorname{rank} E_2, \tag{5.38}$$

то в (5.35) $x_2 = -B_2 w$ і для будь-якої кусково-неперервної вектор-функції $w(t)$ система (5.34) має єдиний неперервний розв'язок.

5.3.2 Оцінювання зважених критеріїв якості

Визначимо критерій якості системи (5.34) як

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{5.39}$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких система має розв'язок і $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — задані вагові матриці. Зокрема, вираз (5.39) позначимо як J_0 або J_1, якщо відповідно $x_0^\top X_0 x_0 = 0$ або $w \equiv 0$. Очевидно, що $J_0 \leq J$ і $J_1 \leq J$, причому J_1 є характеристикою першої підсистеми (5.35), оскільки $x_2 \equiv 0$ при $w \equiv 0$. Пара (w, x_0) є *найгіршою* щодо критерію якості J, якщо в (5.39) досягається супремум, тобто $\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big)$.

Якщо вагову матрицю X_0 в (5.39) подано у вигляді

$$X_0 = E^\top H E, \quad H = L^\top \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix} L \tag{5.40}$$

або

$$X_0 = E_1^\top H E_1 = R^{-1\top} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \tag{5.41}$$

де $H = H^\top > 0$ — задана матриця, то у випадку $\nu = 1$ виконується рівність $x_0^\top X_0 x_0 = x_{01}^\top H_1 x_{01}$ і значення J не залежить від x_{02}, а також блоків H_2 і H_3.

Лема 5.3 *Якщо для деякої матриці $X = X^\top$ виконується система ЛМН*

$$A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC \le 0, \tag{5.42}$$

$$0 \le E^\top XE \le \gamma^2 X_0, \tag{5.43}$$

то $J_1 \le \gamma$. При цьому $J_1 < \gamma$, якщо виконуються умови (5.41) *і*

$$\operatorname{rank}(E^\top XE - \gamma^2 X_0) = \rho. \tag{5.44}$$

Навпаки, якщо $J_1 \le \gamma$ ($J_1 < \gamma$) і виконуються умови (5.41) *і*

$$\operatorname{rank}\left[\, E_2^\top,\, C^\top \right] = \operatorname{rank} E_2, \tag{5.45}$$

то існує матриця $X = X^\top$, яка задовольняє співвідношення (5.43) ((5.43) *і* (5.44)) *та рівняння*

$$A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC = 0. \tag{5.46}$$

Зауваження 5.4 Якщо в лемі 5.3 замість (5.45) використати обмеження

$$\operatorname{rank}\left[\, E_1^\top,\, C^\top \right] = \operatorname{rank} E_1, \tag{5.47}$$

еквівалентне рівності $C_2 = 0$, то матрицю X у відповідних твердженнях можна побудувати як

$$X = Z^\top SZ, \quad S = S^\top. \tag{5.48}$$

Зокрема, за умов (5.41) і (5.47) оцінка $J_1 < \gamma$ виконується тоді і лише тоді, коли існує матриця (5.48), що задовольняє співвідношення (5.43), (5.44) і (5.46). Для виконання строгої оцінки $J_1 < \gamma$ за умов (5.40) або (5.41) достатньо, щоб система ЛМН (5.42), $E^\top XE \ge 0$ і $X < \gamma^2 H$ була сумісною.

Лема 5.4 *Якщо для деякої матриці $X = X^\top$ виконується система ЛМН* (5.43) *і*

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^\top XE + E^\top XA + C^\top QC & E^\top XB + C^\top QD \\ B^\top XE + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} \le 0, \tag{5.49}$$

то $J \leq \gamma$*. При цьому* $J < \gamma$*, якщо виконуються умови* (5.37), (5.40) *і*

$$\operatorname{rank}\Phi(X) = \rho + s, \quad \operatorname{rank}(E^\top XE - \gamma^2 X_0) = \rho. \tag{5.50}$$

Навпаки, якщо $J \leq \gamma$ $(J < \gamma)$ *і виконуються умови* (5.41)*, а також* (5.47) *або* (5.38)*,* (5.45) *і* $\operatorname{rank}\big[\,E_1^\top,\, C^\top QD\,\big] = \operatorname{rank} E_1$*, то система співвідношень* (5.43) *і* (5.49) $\big($(5.43)*,* (5.49) *і* (5.50)$\big)$ *сумісна.*

Наслідок 5.2 *Якщо виконуються умови* (5.37) *і* (5.47)*, де* $E_1 = E$*, то* $J_0 < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень*

$$\Phi(X) \leq 0, \quad \operatorname{rank}\Phi(X) = \rho + s, \quad E^\top XE \geq 0. \tag{5.51}$$

Зауваження 5.5 Якщо в лемі 5.4 використати обмеження (5.47), то матрицю X у відповідних твердженнях можна побудувати у вигляді (5.48). Зокрема, за умов (5.41) і (5.47) $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли існує матриця (5.48), що задовольняє співвідношення (5.43), (5.49) і (5.50). Друга умова в (5.50) завжди виконується при $X < \gamma^2 H$. Якщо вагова матриця $X_0 = X_0^\top > 0$, то за умови (5.37) $J < \gamma$, коли сумісна система співвідношень (5.51) і $E^\top XE < \gamma^2 X_0$.

Наведемо умови виконання верхніх оцінок для критеріїв якості J_0 і J класу допустимих систем (5.34), використовуючи несиметричні розв'язки матричних нерівностей.

Відомо, що система (5.34) є допустимою тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень [130]

$$A^\top X + X^\top A < 0, \quad E^\top X = X^\top E \geq 0. \tag{5.52}$$

Не обмежуючи загальності, у цьому критерії матрицю X можна визначити як [122]

$$X = SE + W_{E^\top} G, \quad S = S^\top > 0, \tag{5.53}$$

де $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $G \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$ — нові шукані матриці. При цьому друге співвідношення в (5.52) виконується автоматично.

Запишемо друге співвідношення в (5.52), еквівалентне (5.53), у вигляді ЛМН щодо двох матриць X і $S_0 = S_0^\top \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 - E^\top X \\ S_0 - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{5.54}$$

Тут $S_0 = E^\top X = X^\top E$, оскільки всі елементи рядків і стовпців невід'ємно визначеної матриці, що відповідають нульовим діагональним елементам, також мають бути нульовими.

Лема 5.5 *Якщо існують матриці X і $S_0 = S_0^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН* (5.54) *і*

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{5.55}$$

то система (5.34) *допустима і $J_0 < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови*

$$\operatorname{rank} \left[E^\top, C^\top QD \right] = \rho. \tag{5.56}$$

Застосовуючи лему 8.6, можна встановити, що ЛМН (5.55) має розв'язок X тоді і лише тоді, коли $D^\top QD < \gamma^2 P$ і $D_1^\top QD_1 < \gamma^2 P$, де $D_1 = D - CA^{-1}B$. Із цих співвідношень та леми 5.5, зокрема, випливає нижня оцінка $J_0 > \gamma_0$, де

$$\gamma_0 = \max\left\{\gamma : \det\left[(D^\top QD - \gamma^2 P)(D_1^\top QD_1 - \gamma^2 P)\right] = 0\right\}.$$

Лема 5.6 *Нехай вагова матриця X_0 подана у вигляді* (5.40). *Якщо сумісна система співвідношень* (5.54), (5.55) *і*

$$S_0 \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}(S_0 - \gamma^2 X_0) = \rho, \tag{5.57}$$

то система (5.34) *допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови* (5.56).

Зауваження 5.6 Застосовуючи лему 8.8, можна встановити, що співвідношення (5.54) і (5.57) у лемі 5.6 виконуються тоді і лише тоді, коли матрицю X можна подати так:

$$X = SE + W_{E^\top} G, \quad 0 < S < \gamma^2 H. \tag{5.58}$$

Лема 5.7 *Нехай вагову матрицю* X_0 *подано у вигляді* (5.40). *Система* (5.34) *допустима і* $J < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли система ЛМН* (5.58) *і*

$$\Xi(X,\Lambda) = \Psi(X) + \begin{bmatrix} 0 & A^\top W_{E^\top}\Lambda \\ \Lambda^\top W_{E^\top}^\top A & B^\top W_{E^\top}\Lambda + \Lambda^\top W_{E^\top}^\top B \end{bmatrix} < 0 \tag{5.59}$$

сумісна щодо $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$ *і* $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times s}$.

Для доведення леми 5.7 систему (5.34) можна записати як

$$\widetilde{E}\,\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\,\widetilde{x} + \widetilde{B}\,w, \quad z = \widetilde{C}\,\widetilde{x}, \quad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \quad \widetilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},\ \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ -I_s \end{bmatrix},\ \widetilde{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$$

та застосувати до неї лему 5.6.

Із лем 5.3—5.7 випливають алгоритми обчислення критеріїв якості системи (5.34) типу (5.39), що ґрунтуються на розв'язанні відповідних оптимізаційних задач. Зокрема, за умов лем 5.6 і 5.7 відповідно маємо

$$J = \inf\left\{\gamma:\ \Psi(X) < 0,\ 0 \le E^\top X = X^\top E \le \gamma^2 X_0\right\},$$

$$J = \inf\left\{\gamma:\ \Xi\bigl(SE + W_{E^\top}G, \Lambda\bigr) < 0,\ 0 < S < \gamma^2 H\right\}.$$

Зауваження 5.7 За умов, що забезпечують строгі оцінки $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ у лемах 5.4—5.6, нульовий стан системи (5.34) зі структурованою невизначеністю (5.9) робастно стійкий. Зокрема, за умов леми 5.4 (5.6) квадратична форма $v(x) = x^\top E^\top X E x$ $(v(x) = x^\top S_0 x)$ є спільною функцією Ляпунова відповідної сім'ї систем. Ці факти встановлюються на базі перетворення пари матриць (E, A) до канонічної форми Веєрштрасса та застосування теореми 3.6.

Зауваження 5.8 Якщо для деяких матриць X і $S_0 = S_0^\top$ при $\gamma = J$ виконуються співвідношення (5.54) і

$$S_0 \le \gamma^2 X_0, \quad A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 = 0,$$

де матриці A_1, R_1 і Q_1 визначено в (5.10), то структурований вектор збурень (5.12), при якому скінченний спектр в'язки матриць $A + BK_* - \lambda E$ належать $\mathbb{C}^-$, та будь-який вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(S_0 - \gamma^2 X_0)$ є найгіршими зовнішніми та початковими збуреннями в системі (5.34) щодо критерію якості J (див. зауваження 5.2).

5.3.3 Гасіння обмежених збурень

Розглянемо дескрипторну систему з керованими та спостережуваними виходами:

$$\begin{array}{l} E\,\dot{x} = A\,x + B_1\,w + B_2\,u, \quad x(0) = x_0, \\ z = C_1\,x + D_{11}\,w + D_{12}\,u, \\ y = C_2\,x + D_{21}\,w + D_{22}\,u, \end{array} \tag{5.60}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^l$ і $\operatorname{rank} E = \rho \le n$. Керування шукатимемо у вигляді статичного або динамічного регуляторів за спостережуваним виходом y, які гарантують задану оцінку $J < \gamma$ для критерію якості (5.39) замкненої системи щодо керованого виходу z.

Надалі будемо припускати, що вагову матрицю X_0 в (5.39) подано у вигляді (5.40).

Якщо в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ неімпульсна, то для розв'язування поставленої задачі можна застосувати невироджене перетворення системи (5.60) на базі співвідношень

$$LER = \begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad LAR = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}. \tag{5.61}$$

Тут

$$L = \begin{bmatrix} E_l^{+} \\ E_l^{\perp +} \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} E_r^{+} \\ E_r^{\perp +} \end{bmatrix}^\top, \; x = R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; x_1 \in \mathbb{R}^\rho, \; x_2 \in \mathbb{R}^{n-\rho},$$

$E_l, E_r \in \mathbb{R}^{n\times\rho}$ — компоненти скелетного розкладу $E = E_l E_r^\top$. При цьому рангова умова (5.37) виконується тоді і лише тоді, коли

$$\det\, A_4 \ne 0, \quad A_4 = E_l^{\perp +} A E_r^{\perp + \top}. \tag{5.62}$$

Виключаючи змінну $x_2 = -A_4^{-1}\big(A_3 x_1 + B_{12} w + B_{22} u\big)$ в (5.60) за умов (5.61) і (5.62), отримаємо звичайну систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \bar{A}\,x_1 + \bar{B}_1\,w + \bar{B}_2\,u, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ z &= \bar{C}_1\,x_1 + \bar{D}_{11}\,w + \bar{D}_{12}\,u, \\ y &= \bar{C}_2\,x_1 + \bar{D}_{21}\,w + \bar{D}_{22}\,u, \end{aligned} \tag{5.63}$$

де

$$\bar{A} = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3,\ \ \bar{B}_1 = B_{11} - A_2 A_4^{-1} B_{12},\ \ \bar{B}_2 = B_{21} - A_2 A_4^{-1} B_{22},$$

$$\bar{C}_1 = C_{11} - C_{12} A_4^{-1} A_3, \bar{D}_{11} = D_{11} - C_{12} A_4^{-1} B_{12}, \bar{D}_{12} = D_{12} - C_{12} A_4^{-1} B_{22},$$

$$\bar{C}_2 = C_{21} - C_{22} A_4^{-1} A_3, \bar{D}_{21} = D_{21} - C_{22} A_4^{-1} B_{12}, \bar{D}_{22} = D_{22} - C_{22} A_4^{-1} B_{22},$$

$$LB_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, LB_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, C_1 R = \big[\, C_{11}, C_{12} \,\big], C_2 R = \big[\, C_{21}, C_{22} \,\big].$$

Спектр матриці $\bar{A}$ збігається з $\sigma(F)$, а критерій якості J цієї системи не залежить від x_2. Справді, враховуючи, що $L^{-1} = \big[\, E_l, E_l^{\perp} \,\big]$, маємо $x_0^{\top} X_0 x_0 = x_{10}^{\top} H_1 x_{10}$, де $H_1 = E_l^{\top} H E_l$.

Отже, до системи (5.63) за умови (5.62) можна застосувати відомі методи синтезу статичних та динамічних регуляторів (див. підрозд. 5.2), які розв'язують поставлену задачу для вихідної дескрипторної системи (5.60). Якщо умова (5.62) не виконується, але існує така матриця K_1, що $\det\,\big[E_l^{\perp +}(A + B_2 K_1 C_2) E_r^{\perp + \top}\big] \neq 0$, то у випадку $D_{22} = 0$ замість (5.17) можна застосувати регулятор $u = K_1 y + \tilde{u}$, де $\tilde{u} = K y$ — нове керування, яке розв'язує поставлену задачу для замкненої системи.

Досліджуючи клас систем (5.60), використовують такі їхні властивості, як C-, R- та I-*керованість*, а також двоїсті до них C-, R- та I-*спостережуваність* [17, 110]. Зокрема, розв'язуючи узагальнені задачі H_∞-оптимізації необхідно, щоб трійка матриць (E, A, B_2) була стабілізовною та I-керованою. Це означає, що повинна існувати така матриця K, що пара матриць $(E, A + B_2 K)$ є стійкою і неімпульсною, тобто допустимою. Критеріями I-керованості трійки (E, A, B_2) та I-спостережуваності трійки (E, A, C_2) є відповідні рівності [104]

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_2 \end{bmatrix} = n + \rho, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} E^{\top} & 0 & 0 \\ A^{\top} & E^{\top} & C_2^{\top} \end{bmatrix} = n + \rho.$$

Замкнена система зі статичним регулятором (5.17) має вигляд

$$E\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad z = C_* x + D_* w, \tag{5.64}$$

де матричні коефіцієнти A_*, B_*, C_* і D_* визначені в (5.19). Враховуючи лему 5.6, сформулюємо аналог теореми 5.1.

Теорема 5.3 *Нехай для деяких матриць X, Y і $S_0 = S_0^\top$ виконується система співвідношень* (5.54), (5.57) *і*

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{5.65}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + Y^\top A^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & Y^\top C_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{5.66}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \tag{5.67}$$

де $R = \begin{bmatrix} C_2, \, D_{21} \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} B_2^\top, \, D_{12}^\top \end{bmatrix}$ і $\gamma > 0$. Тоді існує статичний регулятор (5.17)*, за якого замкнена система* (5.64) *є допустимою і має критерій якості $J < \gamma$. Навпаки, якщо для деякого регулятора* (5.17) *замкнена система* (5.64) *допустима, $J < \gamma$ і*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E^\top, \; C_*^\top Q D_* \end{bmatrix} = \rho, \tag{5.68}$$

то система співвідношень (5.54), (5.57), (5.65)*—*(5.67) *сумісна.*

За умов теореми 5.3 шукану матрицю K регулятора (5.17) можна визначити у вигляді (5.20), де K_0 — розв'язок ЛМН:

$$L_0^\top K_0 R_0 + R_0^\top K_0^\top L_0 + \Omega < 0, \tag{5.69}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} C_2, D_{21}, 0_{l\times k} \end{bmatrix}, \quad L_0 = \begin{bmatrix} B_2^\top, D_{12}^\top, 0_{m\times s} \end{bmatrix} \widetilde{X},$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Рангова умова (5.68) не залежить від K і виконується, якщо

$$D_{11} = 0, \quad D_{21} = 0 \tag{5.70}$$

або

$$D_{12} = 0, \quad \operatorname{rank} \left[\begin{array}{cc} E^\top, & C_1^\top Q D_{11} \end{array} \right] = \rho. \tag{5.71}$$

Запишемо співвідношення (5.54) і (5.57) як

$$\begin{bmatrix} G_0 & G_0 - EY \\ G_0 - Y^\top E^\top & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{5.72}$$

$$0 \leq G_0 \leq Y^\top X_0 Y, \quad \operatorname{rank}(G_0 - Y^\top X_0 Y) = \rho, \tag{5.73}$$

де $Y = \gamma^2 X^{-1}$, G_0 — деяка невідома матриця.

Наслідок 5.3 *Нехай виконуються умови* (5.25) *і сумісна щодо* Y *і* $G_0 = G_0^\top$ *система співвідношень* (5.66) *і* (5.72) $\big($(5.66), (5.72) *і* (5.73)$\big)$. *Тоді для системи* (5.60) *існує статичний регулятор за станом* $u = Kx$, *за якого замкнена система* (5.64) *є допустимою і виконується оцінка* $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$. *Зворотне твердження справедливе, якщо разом з* (5.25) *виконуються умови* (5.70) *або* (5.71).

Для системи (5.60) розглянемо сім'ю статичних регуляторів (5.17) при $K \in \mathcal{K}$, де $\mathcal{K} = \big\{K : K^\top \Lambda K \leq \Theta\big\}$, $\Lambda = \Lambda^\top > 0$ і $\Theta = \Theta^\top > 0$ — деякі матриці.

Теорема 5.4 *Нехай існують матриці* X, $S_0 = S_0^\top \geq 0$, $\Lambda = \Lambda^\top > 0$ *і* $\Theta = \Theta^\top > 0$, *що задовольняють систему ЛМН* (5.54) *і*

$$\Omega(X, \Lambda, \Theta) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_2^\top & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \Omega_3^\top & \Omega_5^\top & \Omega_6 \end{bmatrix} < 0, \tag{5.74}$$

де

$$\Omega_1 = A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 + C_2^\top \Theta C_2,$$
$$\Omega_2 = X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} + C_2^\top \Theta D_{21},$$
$$\Omega_3 = X^\top B_2 + C_1^\top Q D_{12} + C_2^\top \Theta D_{22},$$
$$\Omega_4 = D_{11}^\top Q D_{11} + D_{21}^\top \Theta D_{21} - \gamma^2 P,$$
$$\Omega_5 = D_{11}^\top Q D_{12} + D_{21}^\top \Theta D_{22}, \;\; \Omega_6 = D_{12}^\top Q D_{12} + D_{22}^\top \Theta D_{22} - \Lambda.$$

Тоді для будь-якого керування (5.17) *при* $K \in \mathcal{K}$ *замкнена система* (5.64) *є допустимою і виконується оцінка* $J_0 < \gamma$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо разом з* (5.54) *і* (5.74) *виконуються умови* (5.57).

Доведення теореми 5.4 безпосередньо випливає з лем 5.5, 5.6, 8.10 та подання виразу (5.55) у лемі 5.5 для замкненої системи (5.64) у вигляді

$$W(X) + U^\top(X)K_0V + V^\top K_0^\top U(X) + V^\top K_0^\top R K_0 V < 0, \quad (5.75)$$

де $K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K$, $V = \left[\, C_2,\, D_{21} \,\right]$, $R = D_{12}^\top Q D_{12}$,

$$U(X) = \left[\, B_2^\top X + D_{12}^\top Q C_1,\, D_{12}^\top Q D_{11} \,\right],$$

$$W(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix}.$$

При цьому умову $\Omega < 0$ в (8.20) записують як (5.74) (див. зауваження 8.1).

У разі застосування теореми 5.4 необхідно, щоб за відсутності керування ($u = 0$) виконувалася оцінка $J_0 < \gamma$, а в'язка матриць $F(\lambda)$ була допустимою. Для знаходження керування (5.17), що забезпечує ці властивості замкненої системи, можна скористатися умовами (b) і (e) леми 8.7 для виразу (5.75) у випадках $D_{12} = 0$ і $\operatorname{rank} D_{12} = m$. Зокрема, виконується таке твердження.

Теорема 5.5 *Нехай виконуються умови*

$$R_0 = D_{12}^\top Q D_{12} > 0, \quad R_1 = \gamma^2 P - D_{11}^\top Q_1 D_{11} > 0. \quad (5.76)$$

Тоді існує керування (5.17)*, за якого замкнена система* (5.64) *є допустимою і має критерій якості $J < \gamma$, якщо сумісна щодо X і $S_0 = S_0^\top \geq 0$ система співвідношень* (5.54)*,* (5.57)*,* (5.65) *і*

$$A_2^\top X + X^\top A_2 + X^\top R_2 X + Q_2 < 0, \quad (5.77)$$

де $A_2 = A_1 + B_{11}R_1^{-1}D_{11}^\top Q_1 C_1$, $A_1 = A - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q C_1$, $R_2 = B_{11}R_1^{-1}B_{11}^\top - B_2 R_0^{-1} B_2^\top$, $B_{11} = B_1 - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q D_{11}$, $Q_1 = Q - Q D_{12} R_0^{-1} D_{12}^\top Q$, $Q_2 = C_1^\top (Q_1 + Q_1 D_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1) C_1$.

За умов теореми 5.5 матрицю K шуканого регулятора можна визначити у вигляді (5.20), де K_0 — розв'язок матричної нерівності (5.75). Крім того, за допомогою теореми 5.4 можна побудувати сім'ю таких регуляторів $u = (K + \widetilde{K})\, y$ при $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$.

Розглянемо систему (5.60) з динамічним регулятором (5.27) порядку r і подамо її так (див. зауваження 5.3):

$$\begin{aligned} &\widehat{E}\,\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\,\widehat{x} + \widehat{B}_1\,w + \widehat{B}_2\,\widehat{u}, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \\ &z = \widehat{C}_1\,\widehat{x} + \widehat{D}_{11}\,w + \widehat{D}_{12}\,\widehat{u}, \\ &\widehat{y} = \widehat{C}_2\,\widehat{x} + \widehat{D}_{21}\,w, \end{aligned} \tag{5.78}$$

використовуючи статичний регулятор $\widehat{u} = \widehat{K}_0\widehat{y}$. За умови (5.18) замкнена система у розширеному просторі $\mathbb{R}^{n+r}$ має вигляд

$$\widehat{E}\,\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_*\,\widehat{x} + \widehat{B}_*\,w, \quad z = \widehat{C}_*\,\widehat{x} + \widehat{D}_*\,w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{5.79}$$

де $\widehat{E} = \operatorname{diag}\bigl\{E, I_r\bigr\}$, а матричні коефіцієнти $\widehat{A}_*$, $\widehat{B}_*$, $\widehat{C}_*$ і $\widehat{D}_*$ визначено в (5.28). При цьому матриці регулятора виражаються у вигляді (5.29) через блоки матриці $\widehat{K}_0$.

Нехай $\widehat{J}$ — критерій якості системи (5.79) типу (5.39) з початковим вектором $\widehat{x}_0$ та ваговою матрицею

$$\widehat{X}_0 = \widehat{E}^\top \widehat{H}\widehat{E}, \quad \widehat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Оскільки $\xi_0 = 0$, то його значення збігається з J, причому $X_0 = E^\top HE$ — перший діагональний блок матриці $\widehat{X}_0$.

Позначимо блокові матриці як

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \tag{5.80}$$

і розглянемо умови теореми 5.3 для системи (5.78):

$$\widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} = \widehat{S}_0 \geq 0, \quad \operatorname{rank}(\widehat{S}_0 - \gamma^2 \widehat{X}_0) = \rho + r, \tag{5.81}$$

$$W_{\widehat{R}}^\top \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} + \widehat{C}_1^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^\top Q D_{11} \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} + D_{11}^\top Q \widehat{C}_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_{\widehat{R}} < 0, \tag{5.82}$$

$$W_{\widehat{L}}^\top \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{Y} + \widehat{Y}^\top \widehat{A}^\top + \widehat{B}_1 P^{-1} \widehat{B}_1^\top & \widehat{Y}^\top \widehat{C}_1^\top + \widehat{B}_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 \widehat{Y} + D_{11} P^{-1} \widehat{B}_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_{\widehat{L}} < 0, \tag{5.83}$$

$$\widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}. \tag{5.84}$$

Тут $\widehat{R} = \left[\, \widehat{C}_2,\, \widehat{D}_{21} \,\right]$ і $\widehat{L} = \left[\, \widehat{B}_2^\top,\, \widehat{D}_{12}^\top \,\right]$. Враховуючи блокову структуру матричних коефіцієнтів та вирази

$$W_{\widehat{R}} = \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_s & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_R \\ 0_{r\times s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} W_R,\ R = \left[\, C_2, D_{21} \,\right],$$

$$W_{\widehat{L}} = \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \\ 0 & I_k & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_L \\ 0_{p\times k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} W_L,\ L = \left[\, B_2^\top, D_{12}^\top \,\right],$$

де $s_1 = n+s-\operatorname{rank} R$ і $k_1 = n+k-\operatorname{rank} L$, співвідношення (5.82) і (5.83) зведемо до відповідних нерівностей (5.65) і (5.66) щодо перших діагональних блоків $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$. При цьому матриці X і Y потрібно шукати невиродженими (див. доведення леми 8.4), а доповнювальні блоки $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ і $X_3, Y_3 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ повинні бути такими, щоб виконувалися співвідношення (5.81) і (5.84). Рангового обмеження (5.81) за умов (5.54) і (5.57) можна досягти вибором доповнювальних блоків H_1 і H_2 матриці $\widehat{H}$, які не впливають на значення критерію якості $\widehat{J}$. Для критерію якості $\widehat{J}_0 = J_0$ це обмеження не використовується.

Якщо вдається задовольнити всі співвідношення (5.81)—(5.84), то шукану матрицю $\widehat{K}_0$ визначимо як розв'язок ЛМН:

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}_*^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A}_* & \widehat{X}^\top \widehat{B}_* & \widehat{C}_*^\top \\ \widehat{B}_*^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_*^\top \\ \widehat{C}_* & \widehat{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widehat{L}_0^\top \widehat{K}_0 \widehat{R}_0 + \widehat{R}_0^\top \widehat{K}_0^\top \widehat{L}_0 + \widehat{\Omega} < 0. \tag{5.85}$$

Тут $\quad \widehat{R}_0 = \left[\, \widehat{R}, 0_{(l+r)\times k} \,\right], \quad \widehat{L}_0 = \left[\, \widehat{L}, 0_{(m+r)\times s} \,\right] \widetilde{X},$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widehat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^\top \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Введемо симетричну блокову матрицю

$$W = \begin{bmatrix} S_0 & \gamma E^\top \\ \gamma E & G_0 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{5.86}$$

де $S_0 = E^\top X$ і $G_0 = EY$ — розв'язок ЛМН (5.54) і (5.72). На підставі лем 8.4 і 8.6 отримуємо такий результат.

Теорема 5.6 *Нехай для деяких матриць* X, Y, $S_0 = S_0^\top \geq 0$ *і* $G_0 = G_0^\top \geq 0$ *виконується система ЛМН* (5.57), (5.65), (5.66), (5.86) *і співвідношення*

$$\operatorname{rank} W = \rho + \delta, \quad \operatorname{rank} \Delta = \delta \leq r, \tag{5.87}$$

де $\Delta = \gamma^2 I_n - XY$. *Тоді існує динамічний регулятор* (5.27), *за якого замкнена система* (5.79) *є допустимою і має критерій якості* $J < \gamma$. *Навпаки, якщо для деякого регулятора* (5.27) *замкнена система допустима, виконуються оцінка* $J < \gamma$ *і рівність* (5.68) *то система ЛМН* (5.57) (5.65), (5.66) *і* (5.86) *за умов* (5.87) *сумісна.*

Зауваження 5.9 Замість співвідношень (5.86) і (5.87) у теоремі 5.6 можна використати еквівалентні умови (див. лему 8.4)

$$EY = Y^\top E^\top \geq 0, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X - \Theta E & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \quad \operatorname{rank} \Theta \leq r, \tag{5.88}$$

де $\Theta = \Theta^\top \geq 0$ — нова невідома матриця. При цьому $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top$, де $X_1 = X_3^\top E$, $X_2 = X_2^\top > 0$ і X_3 є доповнювальними блоками матриці $\widehat{X}$ в (8.10). Випадки $\Theta = 0$ або $\delta = 0$ відповідають умовам існування статичного регулятора в теоремі 5.3. За умов (5.86) і (5.87) $\delta \leq \rho$, причому нерівність $\delta \leq r$ виконується автоматично, якщо порядок регулятора $r \geq \rho$.

На підставі теореми 5.6 наведемо алгоритм синтезу динамічного регулятора (5.27) для системи (5.60):

1) обчислення матриць W_L і W_R, де $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top \right]$, $R = \left[C_2, D_{21} \right]$;

2) розв'язування системи ЛМН (5.57), (5.65), (5.66) і (5.86) щодо X, Y, S_0 і G_0 за умов (5.87);

3) формування доповнювальних блоків X_1, X_2 і X_3 матриці $\widehat{X}$ у вигляді (8.14);

4) розв'язування ЛМН (5.85) щодо $\widehat{K}_0$;

5) обчислення матриць регулятора (5.27) за формулою (5.29).

У разі застосування цього алгоритму замкнена система (5.79) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$. Якщо в п. 2 алгоритму замість (5.86) і (5.87) використати співвідношення (5.88) з невідомими X, Y і Θ, то, формуючи матриці X_1, X_2 і X_3 у п. 3, замість (8.14) можна покласти $X_1 = X_3^\top E$ і $X_3 X_2^{-1} X_3^\top = \Theta$. Тоді стовпцями матриці X_3 можуть бути ортонормовані власні вектори матриці Θ, що відповідають її $r = \operatorname{rank}\Theta$ ненульовим власним значенням $\theta_i > 0$, при цьому $X_2 = \operatorname{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}^{-1}$. Для досягнення оцінки $J_0 < \gamma$ можна використати спрощений варіант наведеного алгоритму, в якому співвідношення з ваговою матрицею X_0 не використовується.

На підставі леми 8.7 (умови (b) та (g)), теореми 5.5 та подання системи (5.60) з динамічним регулятором (5.27) у вигляді (5.78) можна встановити таке твердження.

Теорема 5.7 *Нехай виконуються умови* (5.76) *та існують матриці X, S_0 і $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, що задовольняють систему співвідношень* (5.54), (5.57), (5.65) *і*

$$A_2^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top A_2 + \widetilde{X}^\top R_2 \widetilde{X} + Q_2 < 0, \tag{5.89}$$

де $\widetilde{X} = X - \Theta E$, а матриці A_2, R_2 і Q_2 визначено в (5.77). *Тоді існує динамічний регулятор* (5.27) *порядку $r = \operatorname{rank}\Theta$, за якого замкнена система* (5.79) *є допустимою і $J < \gamma$.*

Для побудови динамічного регулятора, що задовольняє теорему 5.7, можна скористатися модифікацією наведеного вище алгоритму, використовуючи замість (5.57), (5.65), (5.66), (5.86) і (5.87) систему співвідношень (5.54), (5.57), (5.65) і (5.89) щодо невідомих X, S_0 і $\Theta = \Theta^\top \geq 0$. При цьому доповнювальні блоки матриці $\widehat{X}$, як і раніше, визначається співвідношеннями $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top$, $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top > 0$, а ранг матриці Θ визначає порядок шуканого динамічного регулятора.

5.3.4 Параметризація розв'язків матричних нерівностей

Під час реалізації викладених методів синтезу регуляторів можуть виникати обчислювальні проблеми, пов'язані з додатковими ранговими обмеженнями на розв'язки X і Y використовуваних матричних нерівностей. Переформулюємо умови існування регуляторів, які забезпечують задану оцінку $J < \gamma$ для критерію якості (5.39) замкненої системи, застосовуючи параметричні подання шуканих матриць:

$$X = SE + W_{E^\top} G, \tag{5.90}$$

$$Y = TE^\top + W_E F, \tag{5.91}$$

де $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $T = T^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$ і $F \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$ – матриці, що підлягають визначенню. Крім того, будемо використовувати компоненти скелетного розкладу $E = E_l E_r^\top$ і вираз вагової матриці (5.40) у (5.39). Застосування цих виразів дає змогу в багатьох випадках вирішити проблеми синтезу для класу систем (5.60) винятково в термінах ЛМН.

Лема 5.8 *Нехай матриці X і Y пов'язані співвідношенням $XY = \gamma^2 I_n$. Тоді такі твердження еквівалентні:*

(i) *виконується система співвідношень*

$$0 \le E^\top X = X^\top E \le \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}(E^\top X - \gamma^2 X_0) = \rho; \tag{5.92}$$

(ii) *матриця X допускає подання* (5.90) *і*

$$0 < E_l^\top S E_l < \gamma^2 E_l^\top H E_l; \tag{5.93}$$

(iii) *матриця Y допускає подання* (5.91) *і*

$$E_r^\top T E_r > (E_l^\top H E_l)^{-1}. \tag{5.94}$$

Доведення. (ii) $\Rightarrow$ (i). Очевидно, що співвідношення (5.92) є наслідком (5.90) і (5.93), оскільки

$$E^\top X = E^\top S E \ge 0, \quad E^\top X - \gamma^2 X_0 = E_r\big(E_l^\top S E_l - \gamma^2 E_l^\top H E_l\big) E_r^\top.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай L і R — невироджені матриці, за яких

$$E = L^{-1}\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \quad E_l = L^{-1}\begin{bmatrix} I_\rho \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_r = R^{-1\top}\begin{bmatrix} I_\rho \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$W_E = R\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-\rho} \end{bmatrix}, \quad W_{E^\top} = L^\top\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-\rho} \end{bmatrix}.$$

Будь-яка матриця X в (5.92) має таку структуру:

$$X = L^\top\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} R^{-1}, \quad 0 < X_1 = X_1^\top < \gamma^2 E_l^\top H E_l. \tag{5.95}$$

Співвідношення (5.95) набувають вигляду (5.90) і (5.93), якщо

$$S = L^\top\begin{bmatrix} S_1 & S_2^\top \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} L, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} R^{-1}, \tag{5.96}$$

де $S_1 = X_1$, $S_2 = X_2 - G_1$, $G_2 = X_3$, причому G_1 і $S_3 = S_3^\top$ — довільні матриці відповідних розмірів.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Співвідношення (5.92) виконуються тоді і лише тоді, коли

$$0 \le EY = Y^\top E^\top \le Y^\top X_0 Y, \quad \operatorname{rank}\big(EY - Y^\top X_0 Y\big) = \rho, \tag{5.97}$$

де $Y = \gamma^2 X^{-1}$. Враховуючи (5.91) і (5.94), маємо

$$EY = ETE^\top \ge 0, \quad EY - Y^\top X_0 Y = E_l T_1 \big(T_1^{-1} - E_l^\top H E_l\big) T_1 E_l^\top,$$

де $T_1 = E_r^\top T E_r$. Крім того, $T_1^{-1} < E_l^\top H E_l$ тоді і лише тоді, коли $T_1 > (E_l^\top H E_l)^{-1}$. Отже, виконуються співвідношення (5.97) і (5.92).

(i) $\Rightarrow$ (iii). За умов (5.92) з урахуванням (5.95) маємо

$$Y = \gamma^2 X^{-1} = \gamma^2 R\begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_3^{-1}X_2X_1^{-1} & X_3^{-1} \end{bmatrix} L^{-1\top}.$$

Покладемо $T_1 = \gamma^2 X_1^{-1}$, $T_2 = -F_1 - \gamma^2 X_3^{-1}X_2X_1^{-1}$, $F_2 = \gamma^2 X_3^{-1}$, $T_3 = T_3^\top$, $F_1 \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times\rho}$ і

$$T = R\begin{bmatrix} T_1 & T_2^\top \\ T_2 & T_3 \end{bmatrix} R^\top, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} L^{-1\top}.$$

Враховуючи подання блоку $T_1 = E_r^\top T E_r$, а також еквівалентність нерівностей $X_1 < \gamma^2 E_l^\top H E_l$ і $\gamma^2 X_1^{-1} > (E_l^\top H E_l)^{-1}$, маємо співвідношення (5.91) і (5.94). $\square$

Зауваження 5.10 Очевидно, що обмеження (5.93) є наслідком нерівностей $0 < S < \gamma^2 H$. Формуючи матрицю S у (5.96), останніх нерівностей завжди можна досягти вибором блоків G_1 і S_3. Можна також встановити, що обмеження (5.94) виконується, якщо $T > X_0^+ = E^+ H^{-1} E^{+\top}$.

Зауваження 5.11 Матриці (5.90) і (5.91) мають таку структуру:

$$X = L^\top \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ S_2 + G_1 & G_2 \end{bmatrix} R^{-1},\ Y = R \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 + F_1 & F_2 \end{bmatrix} L^{-1\top}. \quad (5.98)$$

Ці матриці невироджені тоді і лише тоді, коли невироджені діагональні блоки $S_1 = E_l^\top S E_l$, $G_2 = G W_E$, $T_1 = E_r^\top T E_r$ і $F_2 = F W_{E^\top}$, причому рівність $XY = \gamma^2 I_n$ означає, що

$$S_1 T_1 = \gamma^2 I_\rho,\ G_2 F_2 = \gamma^2 I_{n-\rho},\ (S_2 + G_1) T_1 + G_2 (T_2 + F_1) = 0. \quad (5.99)$$

Перша і друга рівності в (5.99) еквівалентні відповідним умовам:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E_l^\top S E_l & \gamma I_\rho \\ \gamma I_\rho & E_r^\top T E_r \end{bmatrix} = \rho,\ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} G W_E & \gamma I_{n-\rho} \\ \gamma I_{n-\rho} & F W_{E^\top} \end{bmatrix} = n - \rho. \quad (5.100)$$

За цих умов третю рівність в (5.99) можна розв'язати щодо S_2, G_1, T_2 або F_1. Отже, якщо для заданих матриць X і Y вигляду (5.90) і (5.91) виконуються умови (5.100), то існують аналогічні зображення цих матриць $X = \widetilde{S} E + W_{E^\top} \widetilde{G}$ і $Y = \widetilde{T} E^\top + W_E \widetilde{F}$, за яких $XY = \gamma^2 I_n$, причому $E_l^\top S E_l = E_l^\top \widetilde{S} E_l$, $E_r^\top T E_r = E_r^\top \widetilde{T} E_r$, $G W_E = \widetilde{G} W_E$ і $F W_{E^\top} = \widetilde{F} W_{E^\top}$.

На підставі леми 5.8 твердження теорем 5.3—5.5 будуть виконуватись, якщо замість (5.54) і (5.57) використати співвідношення (5.90) і (5.93). За такої зміни формулювань цих теорем шуканими матрицями будуть $S = S^\top$, G і Y.

Наведемо наслідки теореми 5.3 з використанням виразів (5.90) і (5.93). У цій теоремі замість (5.67) можна застосовувати умови (5.100) (див. зауваження 5.11). Для виконання другої умови в (5.100) можна покласти

$$G = \widetilde{G}E + \gamma C W_E^+, \quad F = \widetilde{F}E^\top + \gamma C^{-1} W_{E^\top}^+, \tag{5.101}$$

де $W_E^+ = (W_E^\top W_E)^{-1} W_E^\top$ і $W_{E^\top}^+ = (W_{E^\top}^\top W_{E^\top})^{-1} W_{E^\top}^\top$ — псевдообернені матриці, а C — будь-яка невироджена матриця.

Наслідок 5.4 *Нехай існують матриці $S = S^\top$, $T = T^\top$, $\widetilde{G}$ і $\widetilde{F}$, що задовольняють систему ЛМН* (5.65), (5.66), (5.93) *і*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_l^\top S E_l & \gamma I_\rho \\ \gamma I_\rho & E_r^\top T E_r \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.102}$$

за умови $\operatorname{rank}\Gamma = \rho$, *де X і Y визначено виразами* (5.90), (5.91) *і* (5.101). *Тоді існує статичний регулятор* (5.17), *за якого замкнена система* (5.64) *допустима і має критерій якості $J < \gamma$.*

Наслідок 5.5 *Нехай виконуються умови* (5.25). *Тоді для системи* (5.60) *існує статичний регулятор за станом $u = Kx$, за якого замкнена система* (5.64) *допустима і $J < \gamma$, якщо сумісна одна із систем ЛМН* (5.66) *і* (5.94) *або* (5.94) *і*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2(AY + Y^\top A^\top + B_2 Z + Z^\top B_2^\top) & \gamma^2 B_1 & Y^\top C_1^\top + Z^\top D_{12}^\top \\ \gamma^2 B_1^\top & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{5.103}$$

де Y — невироджена матриця вигляду (5.91). *Зворотне твердження справедливе, якщо разом з* (5.25) *виконуються умови* (5.70) *або* (5.71). *У випадку виконання співвідношень* (5.94) *і* (5.103) *матрицю регулятора можна знайти як $K = ZY^{-1}$.*

Зазначимо, що матриця Y у наслідку 5.5 невироджена, якщо такою є матриця $FW_{E^\top}$. Зокрема, вираз $F = \widetilde{F}E^\top + CW_{E^\top}^\top$, де $\widetilde{F}$— нова шукана, а C — будь-яка невироджена матриці, гарантує невиродженість матриці Y у цьому твердженні.

Наведемо допоміжне твердження, яке дає можливість використовувати вирази (5.90) і (5.91) для побудови динамічних регуляторів.

Лема 5.9 *Нехай* $XY \neq \gamma^2 I_n$, *де* X *і* Y — *матриці вигляду* (5.90) *і* (5.91). *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(i) *матриці* X *і* Y *невироджені й виконуються співвідношення* (5.93), (5.102) *і*

$$\operatorname{rank}\Gamma = \rho + \delta, \quad \delta = \operatorname{rank}\Delta, \quad \Delta = \gamma^2 I_n - XY; \tag{5.104}$$

(ii) *існують матриці* $S_1 \in \mathbb{R}^{\delta\times n}$, $S_2 = S_2^\top \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$, $G_1 \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times\delta}$, $T_1 \in \mathbb{R}^{\delta\times n}$, $T_2 = T_2^\top \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$, $F_1 \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times\delta}$, $H_1 \in \mathbb{R}^{\delta\times n}$ *і* $H_2 = H_2^\top \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$, *за яких*

$$0 < \widehat{E}_l^\top \widehat{S}\widehat{E}_l < \gamma^2 \widehat{E}_l^\top \widehat{H}\widehat{E}_l, \tag{5.105}$$

$$\widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+\delta}, \tag{5.106}$$

де

$$\widehat{X} = \widehat{S}\widehat{E} + W_{\widehat{E}^\top}\widehat{G}, \quad \widehat{S} = \begin{bmatrix} S & S_1^\top \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{G} = \begin{bmatrix} G & G_1 \end{bmatrix}, \tag{5.107}$$

$$\widehat{Y} = \widehat{T}\widehat{E}^\top + W_{\widehat{E}}\widehat{F}, \quad \widehat{T} = \begin{bmatrix} T & T_1^\top \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{F} = \begin{bmatrix} F & F_1 \end{bmatrix}, \tag{5.108}$$

$$\widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_\delta \end{bmatrix} = \widehat{E}_l\widehat{E}_r^\top, \quad \widehat{E}_l = \begin{bmatrix} E_l & 0 \\ 0 & I_\delta \end{bmatrix}, \quad \widehat{E}_r = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & I_\delta \end{bmatrix},$$

$$W_{\widehat{E}} = \begin{bmatrix} W_E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{E}^\top} = \begin{bmatrix} W_{E^\top} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Доведення. (ii) $\Rightarrow$ (i). Запишемо співвідношення (5.105)—(5.108):

$$0 < \begin{bmatrix} E_l^\top S E_l & E_l^\top S_1^\top \\ S_1 E_l & S_2 \end{bmatrix} < \gamma^2 \begin{bmatrix} E_l^\top H E_l & E_l^\top H_1^\top \\ H_1 E_l & H_2 \end{bmatrix}, \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned} XY + X_3Y_1 = \gamma^2 I_n, \quad XY_3 + X_3Y_2 = 0, \\ X_1Y + X_2Y_1 = 0, \quad X_1Y_3 + X_2Y_2 = \gamma^2 I_\delta, \end{aligned} \tag{5.110}$$

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SE + W_{E^\top} G & S_1^\top + W_{E^\top} G_1 \\ S_1 E & S_2 \end{bmatrix}, \quad (5.111)$$

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TE^\top + W_E F & T_1^\top + W_E F_1 \\ T_1 E^\top & T_2 \end{bmatrix}. \quad (5.112)$$

Очевидно, що (5.93) є наслідком (5.109), причому $X_2 = S_2 > 0$ і $Y_2 = T_2 > 0$. Остання нерівність випливає із $\widehat{E}_r^\top \widehat{T} \widehat{E}_r > (\widehat{E}_l^\top \widehat{H} \widehat{E}_l)^{-1}$ (див. лему 5.8).

Із (5.110)—(5.112) випливає, що X і Y — невироджені матриці, оскільки $X(Y - Y_3 Y_2^{-1} Y_1) = (X - X_3 X_2^{-1} X_1)\, Y = \gamma^2 I_n$. Крім того,

$$E^\top X = X^\top E \geq 0, \;\; EY = Y^\top E^\top \geq 0, \;\; X_1 = X_3 E, \;\; Y_1 = Y_3^\top E^\top.$$

Використаємо таке перетворення матриці Γ:

$$\Phi^\top \Gamma \Phi = \begin{bmatrix} E^\top SE & 0 \\ 0 & \Xi \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Phi = \begin{bmatrix} E_r^\top & -\gamma E_r^\top X^{-1} \\ 0 & E_l^\top \end{bmatrix}, \quad (5.113)$$

де $E^\top SE \geq 0$ і $\Xi = E(Y - \gamma^2 X^{-1}) = Y_1^\top Y_2^{-1} Y_1 \geq 0$. Оскільки Φ — матриця повного рангу за рядками, то $\Gamma \geq 0$. Рангові умови (5.104) також виконуються, оскільки $\operatorname{rank}(E^\top SE) = \rho$, $\Xi = -EX^{-1}\Delta$, $\Delta = X_3 Y_1$, $\operatorname{rank}\Delta \leq \operatorname{rank} Y_1 = \operatorname{rank}\Xi \leq \operatorname{rank}\Delta$ і, як наслідок, $\operatorname{rank}\Xi = \delta$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай виконуються умови (5.90), (5.91), (5.93), (5.102) і (5.104), матриці X і Y невироджені і V — множник повного рангу δ за рядками у розкладі $\Xi = E(Y - \gamma^2 X^{-1}) = V^\top V$. Тоді існує розв'язок $U \in \mathbb{R}^{n\times\delta}$ матричного рівняння $UV = \Delta$, оскільки

$$\operatorname{rank} V \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} V^\top & \Delta^\top \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(V^\top V + \Delta^\top \Delta) =$$

$$= \operatorname{rank}\left[(\Delta^\top - EX^{-1})\Delta\right] \leq \operatorname{rank}\Delta = \operatorname{rank}\Xi = \operatorname{rank} V$$

і $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} V^\top & \Delta^\top \end{bmatrix} = \operatorname{rank} V$. При цьому $V^\top = -EX^{-1}U$.

Покладемо

$$S_1 = U^\top - G_1^\top W_{E^\top}^\top, \; S_2 = \gamma^2 I_\delta - VU, \; T_1 = -U^\top X^{-1\top} - F_1^\top W_E^\top, \; T_2 = I_\delta,$$

де $F_1 \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times\delta}$ і $G_1 \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times\delta}$ — довільні матриці. Тоді в (5.111) і (5.112) $X_1 = U^\top E$, $X_2 = \gamma^2 I_\delta - VU$, $X_3 = U$, $Y_1 = V$, $Y_2 = I_\delta$ і $Y_3 = -X^{-1}U$.

Враховуючи $V = -U^\top X^{-1\top} E^\top$, можна переконатися, що виконуються співвідношення (5.110), тобто (5.106). Перша нерівність в (5.109) випливає з леми Шура, оскільки $E_l^\top S E_l > 0$ і

$$\begin{aligned}
&S_2 - S_1 E_l (E_l^\top S E_l)^{-1} E_l^\top S_1^\top = \\
&= \gamma^2 I_\delta - VU - U^\top E_l (E_l^\top S E_l)^{-1} E_l^\top U = \\
&= \gamma^2 I_\delta + U^\top \big[X^{-1\top} E^\top - E_l (E_l^\top S E_l)^{-1} E_l^\top\big] U = \\
&= \gamma^2 I_\delta + U^\top X^{-1\top} E_r \big[I_\rho - E_l^\top S E_l (E_l^\top S E_l)^{-1}\big] E_l^\top U = \\
&= \gamma^2 I_\delta > 0.
\end{aligned}$$

Тут також враховано, що $W_{E^\top} = W_{E_l^\top}$. Друга нерівність у (5.109) виконується, якщо, наприклад, $H_1 = \gamma^{-2} S_1$ і $H_2 > \gamma^{-2} S_2$. □

На підставі лем 5.8 та 5.9 переформулюємо теорему 5.6.

Теорема 5.8 *Нехай існують матриці $S = S^\top$, $T = T^\top$, G і F, що задовольняють систему ЛМН* (5.65), (5.66), (5.93), (5.102), *і рангові обмеження* (5.104), *де X і Y — невироджені матриці вигляду* (5.90) *і* (5.91). *Тоді існує динамічний регулятор* (5.27) *порядку $r = \delta$, за якого замкнена система* (5.79) *є допустимою і має критерій якості $J < \gamma$. Навпаки, якщо для деякого регулятора* (5.27) *замкнена система допустима, виконуються оцінка $J < \gamma$ і рівність* (5.68), *то система співвідношень* (5.65), (5.66), (5.93), (5.102) *і* (5.104) *сумісна.*

Наслідок 5.6 *Нехай існують матриці $S = S^\top$, $T = T^\top$, $\widetilde{G}$ і $\widetilde{F}$, що задовольняють систему ЛМН* (5.65), (5.66), (5.93) *і*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_l^\top S E_l & \gamma I_\rho \\ \gamma I_\rho & E_r^\top T E_r \end{bmatrix} > 0, \tag{5.114}$$

де X і Y — матриці, що визначаються виразами (5.90), (5.91) *і* (5.101). *Тоді існує динамічний регулятор* (5.27) *порядку $r = \delta$, за якого замкнена система* (5.79) *є допустимою і $J < \gamma$.*

Доведення. Матриці X і Y в (5.90), (5.91) і (5.101) невироджені, оскільки

$$\operatorname{rank}(\mathcal{L}^\top X \mathcal{R}) = n, \quad \mathcal{L}^\top X \mathcal{R} = \begin{bmatrix} E^\top S E E^\top & 0 \\ W_{E^\top}^\top X E^\top & \gamma W_{E^\top}^\top W_{E^\top} C \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{R}^\top Y \mathcal{L}) = n, \quad \mathcal{R}^\top Y \mathcal{L} = \begin{bmatrix} ETE^\top E & 0 \\ W_E^\top YE & \gamma W_E^\top W_E C^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тут $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} E, & W_{E^\top} \end{bmatrix}$ і $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} E^\top, & W_E \end{bmatrix}$ — матриці повного рангу n за рядками. Тут враховано, що $E_l^\top S E_l > 0$, $E_r^\top T E_r > 0$ і діагональні вирази $E^\top SEE^\top$ і $ETE^\top E$ мають ранг ρ.

Далі, застосуємо таке перетворення матриці $\Delta = \gamma^2 I_n - XY$:

$$\mathcal{L}^\top \Delta \mathcal{L} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D\, E_l^\top E_l & 0 \\ -W_{E^\top}^\top XYE_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r^\top & 0 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{bmatrix},$$

де $D = \gamma^2 I_\rho - E_l^\top S E_l E_r^\top T E_r$. Із (5.114) випливає, що $\det D \neq 0$ і $\operatorname{rank}\Delta = \rho$. Отже, виконуються рангові обмеження (5.104), де $\operatorname{rank}\Gamma = 2\rho$, $\delta = \rho$, і наслідок 5.6 випливає із теореми 5.8. $\square$

Якщо в наслідку 5.5 замість (5.94) використати нерівність

$$E_r^\top (T - \Theta) E_r > (E_l^\top H E_l)^{-1}, \tag{5.115}$$

де $\Theta = \Theta^\top \geq 0$ — додаткова шукана матриця, то отримаємо умови існування динамічного регулятора порядку $r = \operatorname{rank}\Theta$ за станом за якого замкнена система допустима і $J < \gamma$. Нерівність (5.115) при $r = 0$ збігається з (5.94). Тому ці умови гарантують також існування статичного регулятора за станом з аналогічними властивостями.

Наведемо аналог теореми 5.7 з використанням параметризації (5.90).

Теорема 5.9 *Нехай виконуються умови* (5.76) *та існують матриці* $S = S^\top$, G *і* $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, *що задовольняють систему співвідношень* (5.65), (5.89), (5.90) *і*

$$E_l^\top \Theta E_l < E_l^\top S E_l < \gamma^2 E_l^\top H E_l. \tag{5.116}$$

Тоді існує динамічний регулятор (5.27) *порядку* $r = \operatorname{rank}\Theta$, *за якого замкнена система* (5.79) *є допустимою і має критерій якості* $J < \gamma$.

Зазначимо, що теорема 5.9 у випадку $\Theta = 0$ дає умови існування статичного регулятора за виходом (5.17), за якого замкнена система (5.64) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$.

Приклад 5.2 Розглянемо лінеаризовану модель гідравлічної системи з трьома послідовно сполученими резервуарами (рис. 5.4), яка описується у вигляді (5.60) з такими матрицями [98]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0_{1\times 2}, \quad D_{12} = 1,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0_{2\times 1}.$$

Компоненти вектора стану $x = \left[x_1, x_2, x_3\right]^\top$ визначають рівні рідини у відповідних резервуарах, компонентами вектора $w = \left[w_1, w_2\right]^\top$ є збурення w_1 й похибка w_2 у вимірюваннях $y = \left[x_1, x_2 + w_2\right]^\top$, керованим виходом є $z = x_3 + u$, а роль керування u, що регулює рівні рідини у перших двох резервуарах, відіграє потік рідини в насосі із третього резервуара в перший.

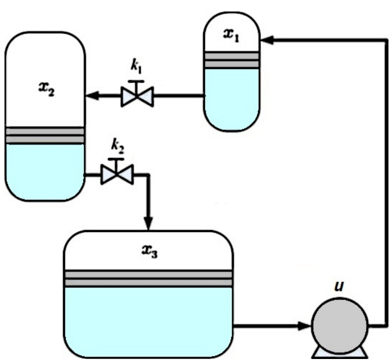


Рис. 5.4. Гідравлічна система

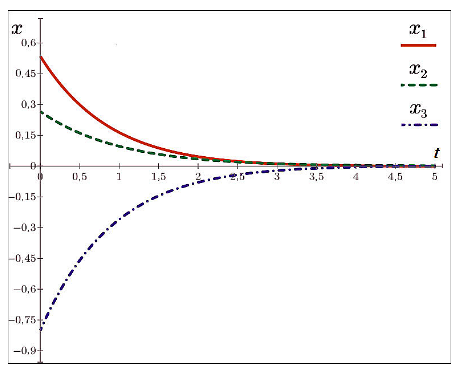


Рис. 5.5. Поведінка замкненої системи (5.119)

У цьому прикладі $n = 3$, $m = 1$, $k = 1$, $s = 2$, $l = 2$, пара матриць (E, A) допустима, система імпульсно керована та імпульсно спостережувана і за відсутності керування має критерій якості $J = 7,66027$.

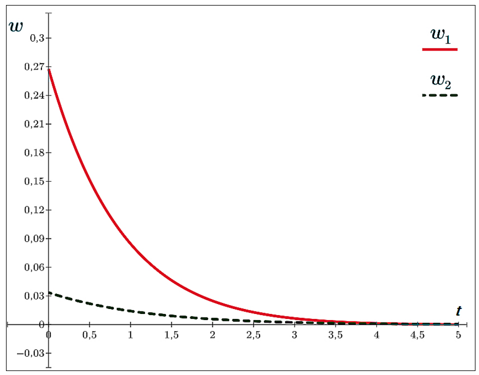


Рис. 5.6. Найгірше збурення щодо критерію якості J

Виберемо вагові матриці критерію якості (5.39) $P = \mathrm{diag}\{2, 1\}$, $Q = 1$, $X_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 0\}$, $H = I_3$ і допустимі значення параметрів

$$\underline{k}_1 = 0,01 \le k_1 \le 0,1 = \overline{k}_1, \quad \underline{k}_2 = 0,1 \le k_2 \le 1,2 = \overline{k}_2. \quad (5.117)$$

Поклавши $\gamma = 2,2$ і застосувавши комп'ютерну систему Mathcad Prime, знаходимо матриці

$$S = \begin{bmatrix} 2,75851 & 1,86824 & 0.02321 \\ 1,86824 & 3,15258 & 0,19783 \\ 0.02321 & 0,19783 & 0,23992 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0,80714 \\ 0,64032 \\ -0,85066 \end{bmatrix}^\top,$$

що задовольняють співвідношення (5.116) при $\Theta = 0$ і систему восьми матричних нерівностей, сформовану згідно з (5.65) і (5.89) за таких значень пари (k_1, k_2): $(\underline{k}_1, \underline{k}_2)$, $(\underline{k}_1, \overline{k}_2)$, $(\overline{k}_1, \underline{k}_2)$, $(\overline{k}_1, \overline{k}_2)$. Визначимо матрицю статичного регулятора (5.17):

$$K = \begin{bmatrix} -1,12507 & -0,76271 \end{bmatrix}$$

як розв'язок системи ЛМН (5.69) за вказаних значень пари (k_1, k_2) і матриці $X = SE + W_{E^\top} G$. При цьому замкнена система (5.64) допустима і її критерій якості $J = 1,67775 < \gamma$ для всіх значень параметрів (5.117) (див. теорему 5.9 у випадку $\Theta = 0$ і лему 1.21).

Далі для замкненої системи при $k_1 = 0,1$ і $k_2 = 1,2$ будуємо найгірші вектор збурення

$$w = K_* x, \quad K_* = \begin{bmatrix} 0,41169 & 0,17803 & 0 \\ -0,40743 & -0,08191 & -0,34139 \end{bmatrix}, \quad (5.118)$$

і початковий вектор $x_0 = \left[\begin{array}{ccc} 0,53574 & 0,26573 & -0,80148 \end{array}\right]^\top$ щодо критерію якості J (див. зауваження 5.8). На рис. 5.5 відображено поведінку розв'язку замкненої системи з найгіршим збуренням:

$$E\,\dot{x} = A_0\,x, \quad A_0 = A + B_2KC_2 + B_1K_*, \quad x(0) = x_0, \qquad (5.119)$$

а на рис. 5.6 — функцію (5.118) цього збурення. Система (5.119) допустима і має скінчений спектр $\Sigma = \big\{ -0,98151 \pm 0,17470\,i \big\}$. Її розв'язок побудовано у вигляді $x(t) = T\widetilde{x}(t)$, де T — матриця повного рангу, для якої виконуються співвідношення $A_0T = ET\Lambda$, $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank}(ET) = \operatorname{rank} E$, $\dot{\widetilde{x}} = \Lambda\widetilde{x}$, $\sigma(\Lambda) = \Sigma$ і $x_0 = T\widetilde{x}_0$.

На підставі теореми 5.9 побудовано також динамічний регулятор (5.27) першого порядку з матрицями

$$K = \left[\begin{array}{cc} -0,95250 & -1,09756 \end{array}\right], \quad U = -0,31040,$$

$$V = \left[\begin{array}{cc} -0,73469 & -1.28101 \end{array}\right], \quad Z = -0,72267,$$

за якого замкнена система (5.79) допустима і виконується оцінка $J < \gamma = 2,2$ для всіх значень параметрів (5.117). Зокрема, при $k_1 = 0,1$ і $k_2 = 1,2$ ця система має скінченний спектр $\Sigma = \big\{ -0,37981; -1,29769 \pm 0,32064\,i \big\}$ і критерій якості $J = 1,75205$.

5.4 Проблема синтезу узагальнених H_∞-регуляторів для нелінійних систем

Визначимо локальні характеристики J та J_0 вигляду (5.4) для класу нелінійних систем:

$$\dot{x} = a(x) + B(x)\,w, \quad z = c(x) + D(x)\,w, \quad x(0) = x_0, \qquad (5.120)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ і $z \in \mathbb{R}^l$ — вектори стану, входу та виходу системи, а $a(x)$ і $c(x)$ ($B(x)$ і $D(x)$) — векторні (матричні) функції, що є неперервними в деякій відкритій і опуклій області $\mathcal{S}_0$. Нехай $a(0) = 0$, $c(0) = 0$ і система (5.120) *внутрішньо стійка*, тобто її нульовий стан $x \equiv 0 \in \mathcal{S}_0$ асимптотично стійкий при $w \equiv 0$.

Якщо для будь-якого $\tau > 0$ виконується нерівність

$$v(x(\tau)) - v(x_0) \leq \int_0^\tau \big(\gamma^2 w^\top P w - z^\top Q z\big)dt, \qquad (5.121)$$

де $v(x)$ — додатно визначена функція, $v(0) = 0$ і

$$v(x) \le \gamma^2 x^\top X_0\, x, \quad x \in \mathcal{S}_0. \tag{5.122}$$

то $\|z\|_Q^2 \le \gamma^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0\, x_0\big)$, тобто $J \le \gamma$. У випадку фіксованого вектора $x_0 = 0$ із (5.121) випливає $J_0 \le \gamma$.

Якщо функція $v(x)$ диференційована, то нерівність (5.121) є наслідком співвідношень

$$\dot v(x) + z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w = \big[\,1, w^\top\,\big]\,\Psi(x) \begin{bmatrix} 1 \\ w \end{bmatrix}, \tag{5.123}$$

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(x) & \psi_{12}(x) \\ \psi_{21}(x) & \psi_{22}(x) \end{bmatrix} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{5.124}$$

де $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x)$ в силу системи (5.120),

$$\psi_{11}(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} a(x) + c^\top(x) Q c(x), \;\; \psi_{22}(x) = D^\top(x) Q D(x) - \gamma^2 P,$$

$$\psi_{12}(x) = \psi_{21}^\top(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial v(x)}{\partial x} B(x) + c^\top(x) Q D(x).$$

Розглядаючи клас псевдолінійних систем

$$\dot x = A(x)\,x + B(x)\,w, \quad z = C(x)\,x + D(x)\,w, \quad x(0) = x_0, \tag{5.125}$$

припускатимемо, що функція $v(x)$ задовольняє умову

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2x^\top X(x), \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{5.126}$$

де $X(x)$ — симетрична матриця, неперервно залежна від x. При цьому замість (5.123) і (5.124) використовуємо співвідношення

$$\dot v(x) + z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w = \big[x^\top, w^\top\big]\,\Phi(x) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \tag{5.127}$$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) \end{bmatrix} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0. \tag{5.128}$$

Тут

$$\Phi_{11}(x) = A^\top(x) X(x) + X(x) A(x) + C^\top(x) Q C(x), \;\; \Phi_{21}(x) = \Phi_{12}^\top(x),$$

$\Phi_{12}(x) = X(x)B(x) + C^\top(x)QD(x)$, $\Phi_{22}(x) = D^\top(x)QD(x) - \gamma^2 P$.

Якщо виконується нерівність (5.128), то матриця $A(0)$ гурвіцева і система (5.125) внутрішньо стійка.

Відомо [128], що для заданої диференційованої векторної функції $h(x) : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$ існує скалярна функція $v(x)$ така, що $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x} = 2h^\top(x)$, тоді і лише тоді, коли

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i}, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{5.129}$$

При цьому функцію $v(x)$ можна визначити як

$$v(x) = 2x^\top \int_0^1 h(tx)dt, \quad v(0) = 0. \tag{5.130}$$

Якщо, крім того, $h(x) = X(x)x$, де $X(x) = \|x_{ij}(x)\|_1^n > 0$, то функція (5.130) додатно визначена, а умови (5.129) еквівалентні системі співвідношень

$$\frac{\partial x_{ip}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial x_{jp}(x)}{\partial x_i}, \quad x \in \mathcal{S}_p, \quad i, j, p = \overline{1, n}, \tag{5.131}$$

де $\mathcal{S}_p = \{x \in \mathcal{S}_0 : x_p \neq 0\}$. У цьому випадку умова (5.122) є наслідком матричних нерівностей

$$0 < X(x) \leq \gamma^2 X_0, \quad x \in \mathcal{S}_0. \tag{5.132}$$

Лема 5.10 *Якщо існує додатно визначена матрична функція $X(x)$, що задовольняє співвідношення* (5.128), (5.131) *і* (5.132), *то система* (5.125) *внутрішньо стійка і має критерій якості $J \leq \gamma$.*

Розглянемо *нелінійну систему керування*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)\,x + B_1(x)\,w + B_2(x)\,u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1(x)\,x + D_{11}(x)\,w + D_{12}(x)\,u, \\ y &= C_2(x)\,x + D_{21}(x)\,w. \end{aligned} \tag{5.133}$$

Нехай усі матричні коефіцієнти неперервні, а матриці

$$R(x) = \left[\, C_2(x), D_{21}(x) \,\right], \quad L(x) = \left[\, B_2^\top(x), D_{12}^\top(x) \,\right]$$

мають сталий ранг при $x \in \mathcal{S}_0$. Сформулюємо умови існування регулятора

$$u = K\,y, \quad K = K(x), \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{5.134}$$

що забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи

$$\dot{x} = A_*(x)x + B_*(x)w, \quad z = C_*(x)x + D_*(x)w, \tag{5.135}$$

та оцінку її критерію якості $J \le \gamma$, де

$$A_*(x) = A(x) + B_2(x)KC_2(x),\ B_*(x) = B_1(x) + B_2(x)KD_{21}(x),$$

$$C_*(x) = C_1(x) + D_{12}(x)KC_2(x),\ D_*(x) = D_{11}(x) + D_{12}(x)KD_{21}(x).$$

Повторюючи доведення теореми 5.1 та застосовуючи лему 5.10, отримаємо співвідношення

$$W_{R(x)}^\top \Phi(x) W_{R(x)} < 0, \quad W_{L(x)}^\top \Psi(x) W_{L(x)} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{5.136}$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} X(x) & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y(x) \end{bmatrix} \ge 0, \quad \operatorname{rank} W(x) = n, \tag{5.137}$$

де

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(x) & \Psi_{12}(x) \\ \Psi_{21}(x) & \Psi_{22}(x) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{11}(x) = A^\top(x)X(x) + X(x)A(x) + C_1^\top(x)QC_1(x),$$
$$\Phi_{12}(x) = \Phi_{21}^\top(x) = X(x)B_1(x) + C_1^\top(x)QD_{11}(x),$$
$$\Phi_{22}(x) = D_{11}^\top(x)QD_{11}(x) - \gamma^2 P,$$
$$\Psi_{11}(x) = A(x)Y(x) + Y(x)A^\top(x) + B_1(x)P^{-1}B_1^\top(x),$$
$$\Psi_{12}(x) = \Psi_{21}^\top(x) = Y(x)C_1^\top(x) + B_1(x)P^{-1}D_{11}^\top(x),$$
$$\Psi_{22}(x) = D_{11}(x)P^{-1}D_{11}^\top(x) - \gamma^2 Q^{-1}, \quad X(x)Y(x) = \gamma^2 I_n.$$

Отже, якщо існують додатно визначені матричні функції $X(x)$ і $Y(x)$, що задовольняють співвідношення (5.131), (5.132), (5.136) і (5.137), то для системи (5.120) існує статичний регулятор (5.134), що забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи (5.135) та оцінку її критерію якості $J \le \gamma$.

Розглянемо систему (5.133) з динамічним регулятором (5.27), де Z, V, U і K — невідомі матриці, які можуть неперервно залежати від $\xi \in \mathcal{R}_0 \subseteq \mathbb{R}^r$ $(0 \in \mathcal{R}_0)$. Замкнена система має вигляд

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_*(\widehat{x})\,\widehat{x} + \widehat{B}_*(\widehat{x})\,w, \quad z = \widehat{C}_*(\widehat{x})\,\widehat{x} + \widehat{D}_*(\widehat{x})\,w. \tag{5.138}$$

Структуру матриць $\widehat{A}_*$, $\widehat{B}_*$, $\widehat{C}_*$ і $\widehat{D}_*$, залежних від $\widehat{x} = [x^\top, \xi^\top]^\top$, наведено в (5.28), де $\widehat{K}_0 = \widehat{K}$.

Використовуючи лему 5.10 для системи (5.138), в загальному випадку необхідно визначити блокові матриці $\widehat{X} = \widehat{X}(\widehat{x})$ і $\widehat{K}$ у співвідношеннях (5.30), (5.31) і

$$0 < \widehat{X} \leq \gamma^2 \widehat{X}_0, \quad \partial\widehat{v}(\widehat{x})/\partial\widehat{x} = 2\widehat{x}^\top \widehat{X}(\widehat{x}),$$

де $\widehat{v}(\widehat{x})$ — деяка додатно визначена функція. При цьому матриці шуканого регулятора (5.27) визначає розв'язок $\widehat{K}$ матричної нерівності типу (5.32) з нелінійними коефіцієнтами:

$$\widehat{L}^\top(\widehat{x})\widehat{K}\widehat{R}(x) + \widehat{R}^\top(x)\widehat{K}^\top\widehat{L}(\widehat{x}) + \widehat{\Omega}(\widehat{x}) < 0, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix}, \tag{5.139}$$

де $\widehat{x} \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{R}_0$. Якщо шукати матрицю $\widehat{X}$ незалежною від ξ, то критерій сумісності нерівності (5.139) має вигляд (5.136). При цьому для будь-якого $x \in \mathcal{S}_0$ повинні виконуватись співвідношення (5.131), (5.132) і

$$W(x) = \begin{bmatrix} X(x) & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y(x) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W(x) \leq n + r. \tag{5.140}$$

Якщо $r = n$ і виконуються всі строгі матричні нерівності в (5.132), (5.136) і (5.140) при $x = 0$, то з огляду на неперервність використовуваних матричних функцій існує таке $\varepsilon > 0$, що ці нерівності справджуються також у певному околі $\mathcal{S}_0^\varepsilon = \{x \in \mathcal{S}_0 : \|x\| < \varepsilon\}$. У цьому випадку за теоремою 5.2 стала матриця $\widehat{K}$, що задовольняє ЛМН (5.139) при $\widehat{x} = 0$, визначає лінійний динамічний регулятор (5.27) повного порядку, за якого замкнена система (5.138) внутрішньо стійка і виконується оцінка її локальної характеристики $J \leq \gamma$ (див. також задачу локального H_∞-керування в [128]).

Розділ 6

Дискретні системи керування

У цьому розділі розглядаються лінійні та нелінійні системи керування з дискретним часом, які внаслідок застосування зворотного зв'язку подаються у векторно-матричній формі:

$$x_{t+1} = M(x_t, t)\, x_t, \quad t \in \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{6.1}$$

де M — матриця розміру $n \times n$, неперервно залежна від $x_t \in \mathbb{R}^n$ і t. Припускаємо, що стан рівноваги $x_t \equiv 0$ таких систем є ізольованим. Вивчаючи стійкість цього стану, використовуємо квадратичні функції Ляпунова $v(x,t) = x^\top X_t x$ з додатно визначеними матрицями X_t та їхні перші різниці $\Delta v(x_t, t) = v(x_{t+1}, t+1) - v(x_t, t)$ в силу системи (6.1).

6.1 Побудова стабілізовних регуляторів

Розглянемо нелінійну систему керування:

$$x_{t+1} = A(x_t)\, x_t + B(x_t)\, u_t, \quad y_t = C(x_t)\, x_t + D(x_t)\, u_t, \tag{6.2}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і спостережуваного виходу об'єкта, $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$– матричні функції, неперервно залежні від x_t у деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \leq h\}$ точки $x = 0$, $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots\}$. Поряд з (6.2) розглядатимемо лінійну систему:

$$x_{t+1} = A\, x_t + B\, u_t, \quad y_t = C\, x_t + D\, u_t, \tag{6.3}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$. Припускатимемо, що $\operatorname{rank} B = m$ і $\operatorname{rank} C = l$.

Головними задачами для системи керування (6.2) є побудова статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують асимптотичну стійкість нульового стану замкненої системи. Якщо такі регулятори існують, то цю систему керування називають *стабілізовною*.

Сформулюємо умови стабілізовності нульового стану систем (6.2) і (6.3) за допомогою статичного регулятора за виходом

$$u_t = K y_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.4}$$

За умови $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система має вигляд

$$x_{t+1} = M x_t, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{6.5}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ і $\mathcal{K}_D = \big\{K : \det(I_m - KD) \neq 0\big\}$.

Лінійну систему (6.5) називатимемо *ρ-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(M)$ розміщений всередині круга $\{\lambda : |\lambda| < \rho\}$, де $0 < \rho \leq 1$. *Спектральний запас* стійкості ρ-стійкої системи $\alpha \geq 1 - \rho$.

Згідно з властивістю (3.43) оператора $\mathbf{D}(K)$ для досягнення бажаних властивостей і, зокрема, стійкості системи (6.5) достатньо забезпечити ці властивості при $D = 0$. Як наслідок, матрицю зворотного зв'язку можна визначити як

$$K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D. \tag{6.6}$$

Теорема 6.1 *Нехай* $\operatorname{rank} B = m < n$ *і* $\operatorname{rank} C = l < n$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) *існує статичний регулятор за виходом* (6.4), *що забезпечує ρ-стійкість системи* (6.5)*;*

2) *існує матриця* $X = X^\top > 0$*, що задовольняє співвідношення*

$$B^{\perp\top}(AXA^\top - \rho^2 X)B^\perp < 0, \tag{6.7}$$

$$\mathrm{i}(H) = \big\{l, m, 0\big\}, \quad H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

де $H_0 = B^+(L - LRL)B^{+\top}$, $H_1 = CXA^\top(I_n - RL)B^{+\top}$, $H_2 = C(X - XA^\top RAX)C^\top$, $L = AXA^\top - \rho^2 X$, $R = B^\perp S^{-1} B^{\perp\top}$, $S = B^{\perp\top} L B^\perp$*;*

3) *існує матриця* $X = X^\top > 0$*, що задовольняє систему матричних нерівностей* (6.7) *і*

$$AXA^\top - \rho^2 X < AXC^\top (CXC^\top)^{-1} CXA^\top. \tag{6.9}$$

4) *існують матриці* $X = X^\top > 0$ *і* $Y = Y^\top > 0$*, що задовольняють рівність* $XY = I_n$ *та систему ЛМН* (6.7) *і*

$$C^\perp(A^\top YA - \rho^2 Y)C^{\perp\top} < 0; \tag{6.10}$$

5) *існує матриця* $Y = Y^\top > 0$*, що задовольняє систему матричних нерівностей* (6.10) *і*

$$A^\top YA - \rho^2 Y < A^\top YB(B^\top YB)^{-1}B^\top YA. \tag{6.11}$$

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Якщо $\rho(M) < 1$ для деякої матриці K, то матрична нерівність Ляпунова:

$$(A + BK_0C)X(A + BK_0C)^\top < \rho^2 X, \tag{6.12}$$

де $K_0 = \mathbf{D}(K)$, має розв'язок $X = X^\top > 0$. Ця нерівність еквівалентна співвідношенням (6.7) і

$$H_0 + K_0H_1 + H_1^\top K_0^\top + K_0H_2K_0^\top < 0. \tag{6.13}$$

При цьому кількості додатних і від'ємних власних чисел блокової матриці H, визначеної в (6.8), збігаються відповідно з l і m (див. доведення леми 3.1).

$2 \Rightarrow 1$. Якщо для деякої матриці $X = X^\top > 0$ виконуються співвідношення (6.7) і (6.8), то матричні нерівності (6.12) і (6.13) еквівалентні та сумісні щодо K_0. Цей факт встановлюється так само, як і в доведенні аналогічного твердження для матричних нерівностей (3.25) і (3.26). Виберемо розв'язок K_0 матричної нерівності (6.12) так, щоб $\det(I_m + K_0D) \neq 0$. Тоді регулятор (6.4) з матрицею зворотного зв'язку (6.6) забезпечує ρ-стійкість замкненої системи (6.5).

$2 \Leftrightarrow 3$. Блокову матрицю (6.8) за умови (6.7) можна подати у вигляді $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^\top \widehat{H}_2^{-1} \widehat{H}_1$, де

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^\top \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} B^+LB^{+\top} & B^+AXC^\top & B^+LB^\perp \\ CXA^\top B^{+\top} & CXC^\top & CXA^\top B^\perp \\ \hline B^{\perp\top}LB^{+\top} & B^{\perp\top}AXC^\top & S \end{array}\right].$$

Крім того $\widehat{H} = W\Delta W^\top$, де

$$\Delta = \begin{bmatrix} AXA^\top - \rho^2 X & AXC^\top \\ CXA^\top & CXC^\top \end{bmatrix}, \quad W^\top = \begin{bmatrix} B^{+\top} & 0 & B^\perp \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи формулу (8.6) для обчислення індексів інерції блокової матриці $\widehat{H}$ і враховуючи, що $W \in \mathbb{R}^{n+l \times n+l}$ — квадратна невироджена матриця, маємо

$$\mathrm{i}_+(\widehat{H}) = \mathrm{i}_+(H) = \mathrm{i}_+(\Delta), \quad \mathrm{i}_-(\widehat{H}) = \mathrm{i}_-(H) + n - m = \mathrm{i}_-(\Delta).$$

Отже, рівність (6.8) набуває вигляду $\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}$ і вона еквівалентна матричній нерівності (6.9).

$3 \Leftrightarrow 4$. Застосовуючи формули (8.5) і (8.6) до блокової матриці

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\rho^2 X & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^\top & C^\top & -X^{-1} \end{bmatrix},$$

отримуємо рівності $\mathrm{i}(\Delta) = \mathrm{i}(\Delta_1) = \mathrm{i}(\Delta_2)$, де

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^\top & \rho^{-2} A^\top Y A - Y \end{bmatrix}, \quad Y = X^{-1},$$

$$\Delta_2 = \rho^2 V \Delta_1 V^\top = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & C^\perp Z C^{\perp\top} \end{bmatrix}, \quad Z = A^\top Y A - \rho^2 Y,$$

$$E = \begin{bmatrix} C^{+\top} Z C^+ & \rho^2 I_l \\ \rho^2 I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{i}(E) = \{l, l, 0\},$$

$$V^\top = \begin{bmatrix} 0 & I_l & -\rho^{-2} C^{+\top} Z C^{\perp\top} \\ C^+ & 0 & C^{\perp\top} \end{bmatrix}, \quad \det V \neq 0.$$

Оскільки V — квадратна невироджена матриця, то $\mathrm{i}_\pm(\Delta_2) = \mathrm{i}_\pm(C^\perp Z C^{\perp\top}) + l$. Враховуючи еквівалентність співвідношень $\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}$ і (6.9), приходимо до висновку, що за умови (6.7) матричні нерівності (6.9) і (6.10) еквівалентні.

$4 \Leftrightarrow 5$. Доведення еквівалентностей $3 \Leftrightarrow 4$ і $4 \Leftrightarrow 5$ аналогічні.

$\square$

Зауваження 6.1 Оскільки в твердженні 2 теореми 6.1 $X > 0$ і $H_2 > 0$, то за лемою Шура матричні нерівності (6.12) і (6.13) еквівалентні відповідним ЛМН:

$$P_1^\top K_0 Q_1 + Q_1^\top K_0^\top P_1 < F_1, \quad P_2^\top K_0 Q_2 + Q_2^\top K_0^\top P_2 < F_2, \tag{6.14}$$

де $P_1 = \left[-B^\top, 0 \right]$, $Q_1 = \left[0, CX \right]$, $P_2 = \left[I_m, 0 \right]$, $Q_2 = \left[H_1, I_l \right]$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} \rho^2 X & AX \\ XA^\top & X \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -H_0 & 0 \\ 0 & H_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Якщо виконується одне із тверджень 2—4 цієї теореми, то шукану матрицю стабілізовного регулятора K можна визначити у вигляді (6.6), де K_0 — розв'язок однієї із еквівалентних ЛМН (6.14) такий, що $-K_0 \in \mathcal{K}_D$.

Зауваження 6.2 За лемою 8.6 критерієм сумісності щодо K_0 першої матричної нерівності (6.14) є співвідношення

$$W_{P_1}^\top F_1 W_{P_1} > 0, \quad W_{Q_1}^\top F_1 W_{Q_1} > 0, \tag{6.15}$$

У цьому випадку можна покласти

$$W_{P_1} = \begin{bmatrix} B^\perp & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad W_{Q_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & YC^{\perp\top} \end{bmatrix}, \quad Y = X^{-1}.$$

Тоді співвідношення (6.15) набувають вигляду (6.7) і (6.10), що підтверджує еквівалентність тверджень 1 та 4 теореми 6.1.

Зауваження 6.3 Оскільки для матричної нерівності (6.12) справедлива теорема інерції, можна стверджувати, що виконання співвідношень (6.7) і (6.8) для деякої матриці $X = X^\top$ з інерцією $\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}$ гарантує існування регулятора (6.4), для якого рівно p і q власних чисел замкненої системи (6.5) розташовані відповідно всередині круга $|\lambda| \leq \rho$ та поза ним (див. наслідок 1.2). При цьому матрицю регулятора можна визначити у вигляді (6.6), розв'язуючи одну із еквівалентних ЛМН (6.14).

Якщо $C = I_n$, то нерівність (6.9) зводиться до умови $X = X^\top > 0$ і виконується таке твердження.

Наслідок 6.1 Нехай $\operatorname{rank} B = m < n$, $C = I_n$ і $D = 0$. Тоді для системи (6.3) існує статичний регулятор за станом $u_t = Kx_t$, що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи, тоді і лише тоді, коли ЛМН (6.7) має розв'язок $X = X^\top > 0$. При цьому стабілізовну матрицю K можна знайти у вигляді (6.6), розв'язавши одну із еквівалентних ЛМН (6.14).

Теорема 6.2 *Нехай виконується одне із тверджень* 2—4 *теореми* 6.1 *для лінійної системи* (6.3). *Тоді регулятор* (6.4) *з матрицею* (6.6), *де* K_0 — *розв'язок однієї із ЛМН* (6.14), *забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану та функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X^{-1} x$ *нелінійної системи* (6.2).

Доведення. Для матриці M замкненої лінійної системи виконуються матричні нерівності

$$MXM^\top - \rho^2 X < 0, \quad M^\top Y M - Y < (\rho^2 - 1)Y \leq 0,$$

де $Y = X^{-1} > 0$. Замкнена нелінійна система має вигляд

$$x_{t+1} = M(x_t)\, x_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.16}$$

Тут $M(x) = A(x) + B(x)\big[I_m - KD(x)\big]^{-1} KC(x)$ і $M(0) = M$. Через неперервність матричної функції $M(x)$ для деякого $h > 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$ виконуються співвідношення

$$\det\big[I_m - KD(x)\big] \neq 0, \quad M^\top(x) Y M(x) - Y < (\rho^2 - 1)Y \leq 0,$$

Тоді для першої різниці функції $v(x)$ в силу системи (6.16) при $x_t \in \mathcal{S}_0$ маємо

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) = x_t^\top \big[M^\top(x_t) Y M(x_t) - Y\big] x_t < (\rho^2 - 1) v(x_t) \leq 0.$$

За теоремою Ляпунова для дискретних систем стан $x_t = 0$ системи (6.16) асимптотично стійкий. □

Запишемо матричну нерівність (6.9) у твердженні 3 теореми 6.1 як $ASA^\top < \rho^2 X$, де

$$S = X - XC^\top (CXC^\top)^{-1} CX = G \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(Z) \end{bmatrix} G^\top, \;\; X = GZG^\top,$$

$$G = \big[C^+, C^{\perp\top}\big], \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2^\top \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}, \quad \Psi(Z) = Z_3 - Z_2 Z_1^{-1} Z_2^\top.$$

На базі цих співвідношень наведемо ітераційний алгоритм обчислення матриці регулятора (6.4), що забезпечує ρ-стійкість лінійної системи (6.3) та асимптотичну стійкість нульового стану нелінійної системи (6.2):

1) обчислення матриць $B^{\perp}$, $C^{\perp}$ і C^{+};

2) розв'язування системи ЛМН щодо Z_k:

$$B^{\perp\top}\big(AGZ_kG^{\top}A^{\top} - \rho^2 GZ_kG^{\top}\big)B^{\perp} < 0, \quad Z_k = \begin{bmatrix} Z_{k1} & Z_{k2}^{\top} \\ Z_{k2} & Z_{k3} \end{bmatrix},$$

$$\rho^2 GZ_kG^{\top} > AG\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(Z_{k-1}) \end{bmatrix}G^{\top}A^{\top},\ 0 < Z_k \leq Z_{k-1},\ k = \overline{1,N},$$

де Z_0 — початкове наближення, N — кількість ітерацій;

3) розв'язування однієї із ЛМН (6.14) щодо K_0 за умов $X = GZ_NG^{\top}$ і $-K_0 \in \mathcal{K}_D$;

4) обчислення матриці регулятора K за формулою (6.6).

У цьому алгоритмі монотонна та обмежена послідовність матриць $Z_0 \geq Z_1 \geq \cdots \geq Z_k \geq \cdots > 0$ має границю. Якщо на деякому кроці $k = N$ відповідна матриця X задовольняє умови (6.7) і (6.9), то стабілізовний регулятор для систем (6.2) і (6.3) визначається за допомогою співвідношень (6.4), (6.6) і (6.14).

Розглянемо системи (6.2) і (6.3) з динамічним регулятором

$$\xi_{t+1} = Z\,\xi_t + V\,y_t, \quad u_t = U\,\xi_t + K\,y_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.17}$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$, а Z, V, U і K — невідомі матриці, r — порядок регулятора. Співвідношення (6.2) і (6.17) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному просторі $\mathbb{R}^{n+r}$. Зокрема, маємо лінійну систему керування

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{A}\,\widehat{x}_t + \widehat{B}\,\widehat{u}_t, \quad \widehat{y}_t = \widehat{C}\,\widehat{x}_t + \widehat{D}\,\widehat{u}_t, \quad \widehat{u}_t = \widehat{K}\,\widehat{y}_t, \tag{6.18}$$

де

$$\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{u}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ \xi_{t+1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}, \widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}, \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

За умови $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена система (6.18) набуває вигляду

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\,\widehat{x}_t, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{6.19}$$

де

$$\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{bmatrix}.$$

Теорема 6.3 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *існує динамічний регулятор* (6.17) *порядку r, що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи* (6.19)*;*

2) *існують матриці X і X_0, що задовольняють співвідношення* (6.7) *і*

$$X \geq X_0 > 0, \quad \operatorname{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{6.20}$$

$$AX_0A^\top - \rho^2 X_0 < AX_0C^\top (CX_0C^\top)^{-1} CX_0A^\top; \tag{6.21}$$

3) *існують матриці $X = X^\top > 0$ і $Y = Y^\top > 0$, що задовольняють співвідношення* (6.7), (6.10) *і*

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{6.22}$$

Доведення. Використовуючи еквівалентні твердження 3 і 4 теореми 6.1 для системи (6.18) з урахуванням блокової структури матричних коефіцієнтів та виразів

$$\widehat{B}^\perp = \begin{bmatrix} B^\perp \\ 0 \end{bmatrix}, \widehat{C}^\perp = \begin{bmatrix} C^\perp, & 0 \end{bmatrix}, \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^\top \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix},$$

а також формули Фробеніуса

$$(\widehat{C}\widehat{X}\widehat{C}^\top)^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}CX_1^\top X_2^{-1} \\ -X_2^{-1}X_1C^\top S^{-1} & X_2^{-1} + X_2^{-1}X_1C^\top S^{-1}CX_1^\top X_2^{-1} \end{bmatrix},$$

де $S = CX_0C^\top$, $X_0 = X - X_1^\top X_2^{-1} X_1$, отримуємо співвідношення (6.7), (6.10) і (6.21). При цьому $\widehat{X} > 0$, $\widehat{Y} = \widehat{X}^{-1}$ і виконуються умови (6.20), які можна подати в еквівалентному вигляді (6.22) при $Y = X_0^{-1}$. Крім того, застосовуючи доведення еквівалентності тверджень 3 і 4 теореми 6.1, можна показати, що матриці X і

X_0 задовольняють співвідношення (6.7), (6.20) і (6.21) тоді і лише тоді, коли матриці X і $Y = X_0^{-1}$ задовольняють співвідношення (6.7), (6.10) і (6.22). Отже, твердження 2 і 3 є критеріями існування регулятора (6.17), що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи (6.19). □

Зауваження 6.4 У разі виконання одного із тверджень 2 або 3 теореми 6.3 шукані матриці стабілізовного регулятора (6.17) можна визначити у вигляді (3.56), розв'язуючи щодо $\widehat{K}_0$ ЛМН:

$$\widehat{P}^\top \widehat{K}_0 \widehat{Q} + \widehat{Q}^\top \widehat{K}_0^\top \widehat{P} < \widehat{F}, \tag{6.23}$$

де

$$\widehat{P} = \big[-\widehat{B}^\top, 0 \big], \quad \widehat{Q} = \big[0, \widehat{C}\widehat{X} \big], \quad \widehat{F} = \begin{bmatrix} \rho^2 \widehat{X} & \widehat{A}\widehat{X} \\ \widehat{X}\widehat{A}^\top & \widehat{X} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},$$

$$X - X_0 = X_1^\top X_2^{-1} X_1 \geq 0, \quad K \in \mathcal{K}_D, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Для обчислення матриць X_1 і X_2 можна використати, наприклад, розклад невід'ємно визначеної матриці $X - X_0 = X_1^\top X_1$, поклавши $X_2 = I_r$, або її спектральне зображення. У разі $r \geq n$ рангові обмеження в (6.20) і (6.22) виконуються автоматично.

Теорема 6.4 *Нехай виконується одне із тверджень* 2 *або* 3 *теореми* 6.3 *для лінійної системи* (6.3)*. Тоді співвідношення* (3.56) *і* (6.23) *визначають динамічний регулятор* (6.17)*, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану та квадратичну функцію Ляпунова* $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^\top \widehat{X}^{-1} \widehat{x}$ *замкненої нелінійної системи* (6.2)*,* (6.17)*.*

6.2 Робастна стабілізація нелінійних дискретних систем керування

Розглянемо нелінійну неавтономну систему керування:

$$x_{t+1} = A(x_t, t)\, x_t + B(x_t, t)\, u_t, \quad y_t = C(x_t, t)\, x_t + D(x_t, t)\, u_t, \tag{6.24}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування та спостережуваного виходу об'єкта, A, B, C і D — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від x_t і t, $t \in \mathcal{T}$.

Нелінійний динамічний зворотний зв'язок порядку r для системи (6.24) можна визначити як

$$\xi_{t+1} = Z(\xi_t, t)\, \xi_t + V(\xi_t, t)\, y_t, \quad u_t = U(\xi_t, t)\, \xi_t + K(\xi_t, t)\, y_t, \quad (6.25)$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathcal{T}$. Систему керування (6.24), (6.25) можна звести до аналогічної системи керування у просторі $\mathbb{R}^{n+r}$ з нелінійним статичним зворотним зв'язком.

Рівняння статичного регулятора визначаємо у вигляді

$$u_t = K(x_t, t)\, y_t, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (6.26)$$

Тут K — невідома матрична функція така, що

$$\det[I_m - K(x,t)D(x,t)] \neq 0, \quad (x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \quad (6.27)$$

$$K(x_t, t) = K_*(x_t, t) + \widetilde{K}(x_t, t), \quad \widetilde{K} \in \mathcal{K}, \quad (6.28)$$

$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^{m \times l}$ — еліпсоїдальна множина матриць вигляду (3.64), яку визначають додатно визначені матриці P і Q відповідних розмірів $m \times m$ і $l \times l$.

За умов (6.27) замкнену систему (6.24), (6.26) подають так:

$$x_{t+1} = M(x_t, t)\, x_t, \quad M(x_t, t) = A + B\mathbf{D}(K)C, \quad (6.29)$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. Надалі цікавою є поведінка розв'язків системи (6.29) в околі $\mathcal{S}_0$ нульового стану $x_t = 0$ при $t \in \mathcal{T}$. При цьому припускатимемо, що при $K(x_t, t) = K_*(x_t, t)$ нульовий стан рівноваги цієї системи є ізольованим і асимптотично стійким.

Згідно з (6.24), (6.26), (6.28) і (3.64) повинна виконуватися нерівність $z_t^\top P z_t \leq y_t^\top Q y_t$ або

$$[x_t^\top, u_t^\top] \begin{bmatrix} C^\top QC - C^\top K_*^\top PK_*C & C^\top QD + C^\top K_*^\top PG \\ D^\top QC + G^\top PK_*C & D^\top QD - G^\top PG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \geq 0,$$

де $z_t = Gu_t - K_*Cx_t$ і $G = I_m - K_*D$, $t \in \mathcal{T}$. Припустимо, що

$$\Delta(x,t) = D^\top QD - G^\top PG < 0, \quad (x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}. \quad (6.30)$$

Тоді, якщо $x_t = 0$, то $u_t = 0$, причому $x_t \equiv 0$ є спільним станом рівноваги замкненої системи для кожної матриці регулятора (6.28).

Лема 6.1 *Нехай для деякої матриці $X_t = X_t^\top$ виконуються співвідношення*

$$\varepsilon_1 I_n \leq X_t, \quad M^\top(x,t) X_{t+1} M(x,t) \leq X_t, \quad (x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \tag{6.31}$$

де $\varepsilon_1 > 0$. Тоді стан $x_t \equiv 0$ системи (6.29) стійкий за Ляпуновим. Якщо

$$\varepsilon_1 I_n \leq X_t \leq \varepsilon_2 I_n, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.32}$$

$$M^\top(0,t) X_{t+1} M(0,t) \leq X_t - \varepsilon_0 I_n, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.33}$$

де $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_0 > 0$, то стан $x_t \equiv 0$ системи (6.29) рівномірно асимптотично стійкий.

За умов (6.31) ((6.32) і (6.33)) квадратична форма $v(x) = x^\top X_t x$ є для системи (6.29) функцією Ляпунова першого (другого) роду.

Теорема 6.5 *Нехай для деяких матриць $X_t = X_t^\top$ і $K_*(x_t,t)$ виконуються співвідношення (6.32) і*

$$B_*^\top X_{t+1} B_* + D_*^\top Q D_* < P, \tag{6.34}$$

$$\begin{bmatrix} M_*^\top X_{t+1} M_* - X_t + \varepsilon_0 I_n & M_*^\top X_{t+1} B_* & C_*^\top \\ B_*^\top X_{t+1} M_* & B_*^\top X_{t+1} B_* - P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{6.35}$$

де $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1} C$, $D_* = D(I_m - K_* D)^{-1}$, $x_t = 0$, $t \in \mathcal{T}$. Тоді будь-яке керування (6.26), (6.28) забезпечує асимптотичну стійкість стану $x_t \equiv 0$ системи (6.24) і спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X_t x$.

Доведення. За умови (6.30), що випливає з (6.32) і (6.34), матриця G має бути невиродженою. Тому за будь-яких $(x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}$

визначено значення оператора $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$. Якщо $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$, то визначено також значення операторів $\mathbf{D}(K)$ і $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K} D_*)^{-1} \widetilde{K}$, де $K = K_* + \widetilde{K}$ (див. доведення теореми 3.6).

Побудуємо функцію Ляпунова для замкненої системи (6.29) у вигляді $v(x,t) = x^\top X_t x$. За лемою 6.1 умови (6.32) і (6.33) забезпечують асимптотичну стійкість стану $x_t \equiv 0$ цієї системи. Використовуючи властивість (3.42) оператора $\mathbf{D}$, подамо матричну нерівність (6.33) у вигляді $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \leq 0$, де

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^\top \mathbf{D}_*(\widetilde{K}) V + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K}) U + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K}) R \mathbf{D}_*(\widetilde{K}) V,$$

$$W = M_*^\top X_{t+1} M_* - X_t + \varepsilon_0 I_n, \quad V = C_*, \quad U = B_*^\top X_{t+1} M_*,$$
$$R = B_*^\top X_{t+1} B_*.$$

Застосовуючи лему 8.10 для оператора $\mathcal{F}_*(\widetilde{K})$, отримуємо умови (6.34) і (6.35), за яких виконується матрична нерівність (6.33) для будь-якої матриці $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$. $\square$

Зазначимо, що в [11] на базі властивості неущербності S-процедури отримано аналогічне твердження зі сталою матрицею X у разі $P = I_m$ і $Q = \mu I_l$ (μ — радіус стійкості матриць зворотного зв'язку K для лінійних автономних систем). Матриці P і $Q_1 = Q^{-1}$ входять у співвідношення (6.35) лінійно, причому (6.34) є наслідком строгої нерівності (6.35). Тому ці матриці можна вважати невідомими та визначати разом з X за допомогою комп'ютерних засобів. Це розширює можливості методики квадратичної стабілізації [11] як для лінійних, так і для нелінійних дискретних систем.

Сформулюємо наслідки теореми 6.5 за наявності функціональних невизначеностей

$$\begin{aligned} A(0,t) &\in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\alpha\}, \quad t \in \mathcal{T}, \\ B(0,t) &\in \mathrm{Co}\{B_1, \dots, B_\beta\}, \quad t \in \mathcal{T}, \\ C(0,t) &\in \mathrm{Co}\{C_1, \dots, C_\gamma\}, \quad t \in \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

де задані набори сталих матриць A_i, B_j і C_k є вершинами деяких політопів у відповідних просторах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ і $\mathbb{R}^{l\times n}$.

За лемою 1.23 для будь-якої матриці K матрична нерівність (6.33) випливає із системи нерівностей

$$M_{ijk}^{\top} X_{t+1} M_{ijk} - X_t + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad i = \overline{1,\alpha},\ j = \overline{1,\beta},\ k = \overline{1,\gamma}.$$

Тут $M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K) C_j$, $t \in \mathcal{T}$. Тому для виконання умов (6.34) і (6.35) теореми 6.5 достатньо, щоб виконувалася система нерівностей

$$\begin{bmatrix} M_{*ijk}^{\top} X_{t+1} M_{*ijk} - X_t + \varepsilon_0 I_n & M_{*ijk}^{\top} X_{t+1} B_{*j} & C_{*k}^{\top} \\ B_{*j}^{\top} X_{t+1} M_{*ijk} & B_{*j}^{\top} X_{t+1} B_{*j} - P & D_*^{\top} \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6.37}$$

де

$$M_{*ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_j, \quad B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1},$$
$$C_{*k} = (I_l - D K_*)^{-1} C_k, \quad i = \overline{1,\alpha},\ j = \overline{1,\beta},\ k = \overline{1,\gamma},\ x_t = 0.$$

Наслідок 6.2 *Нехай для деяких матриць $X_t = X_t^{\top}$ і $K_*(x_t, t)$ виконується система матричних нерівностей* (6.32) *і* (6.37). *Тоді будь-яке керування* (6.26), (6.28) *забезпечує асимптотичну стійкість стану $x_t \equiv 0$ сім'ї систем* (6.24), (6.36) *і спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^{\top} X_t x$.*

Наведемо наслідок теореми 6.5 за умов (6.36) і

$$K_* \equiv 0, \quad D(0,t) \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_\delta\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.38}$$

Наслідок 6.3 *Нехай сумісною є система матричних нерівностей із сталими матрицями*

$$\begin{bmatrix} A_i^{\top} X A_i - X & A_i^{\top} X B_j & C_k^{\top} \\ B_j^{\top} X A_i & B_j^{\top} X B_j - P & D_s^{\top} \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0, \tag{6.39}$$

де $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$. Тоді будь-яке керування (6.26), (6.28) *при $K_* \equiv 0$ забезпечує асимптотичну стійкість стану $x_t \equiv 0$ сім'ї систем* (6.24), (6.36), (6.38) *і спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^{\top} X x$.*

6.3 Оцінка квадратичного критерію якості за умов невизначеності

Розглянемо систему керування (6.24) з квадратичним функціоналом якості

$$J_u(x_0) = \sum_0^\infty \varphi_t, \quad \varphi_t = \left[x_t^\top \; u_t^\top\right] \Phi_t \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}, \; \Phi_t = \begin{bmatrix} S & N \\ N^\top & R \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

де $x_0 \in \mathcal{S}_0$ —вектор початкового стану, а блоки симетричної матриці Φ для деякого $\eta > 0$ задовольняють умови

$$S \geq N R^{-1} N^\top + \eta I_n, \quad R > 0, \quad t \in \mathcal{T}. \qquad (6.41)$$

Потрібно описати множину керувань (6.26), (6.28), що забезпечують асимптотичну стійкість нульового стану замкненої системи та бажану оцінку функціонала

$$J_u(x_0) \leq \omega. \qquad (6.42)$$

Цю задачу, як і раніше, розв'язуємо за допомогою квадратичної функції Ляпунова $v(x,t) = x^\top X_t x$ з матрицею $X_t = X_t^\top$, яка задовольняє умови (6.32). За умов (6.28) і (6.30) визначено значення операторів $\mathbf{D}(K)$, $\mathbf{D}(K_*)$ і $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K} D_*)^{-1} \widetilde{K}$, де $D_* = D(I_m - K_* D)^{-1}$ (див. доведення теореми 3.6). При цьому замкнена система подається у вигляді (6.29), а перша різниця функції v в силу системи та вираз φ_t у (6.40) мають вигляд

$$v(x_{t+1}, t+1) - v(x_t, t) = x_t^\top \left[M^\top X_{t+1} M - X_t\right] x_t, \; \varphi_t = x_t^\top L^\top \Phi L \, x_t,$$

де $L^\top(x_t, t) = \left[I_n, C^\top \mathbf{D}^\top(K)\right]$, $K = K_* + \widetilde{K}$. Вимагаємо, щоб разом з (6.30) і (6.32) виконувалися нерівності

$$v(x_{t+1}, t+1) - v(x_t, t) \leq -\varphi_t \leq -\eta \, \|x_t\|^2, \;\; (x_t, t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \quad (6.43)$$

де $\mathcal{S}_0$ — окіл точки $x = 0$, що містить x_0. Для цього достатньо, щоб виконувались співвідношення (6.41) і

$$M_0^\top X_{t+1} M_0 - X_t + L_0^\top \Phi L_0 + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad t \in \mathcal{T}, \qquad (6.44)$$

де $M_0 = M(0,t)$, $L_0 = L(0,t)$, $\varepsilon_0 > 0$.

За умов (6.32) і (6.43) стан $x_t \equiv 0$ замкненої системи (6.29) асимптотично стійкий і виконується оцінка функціонала

$$J_u(x_0) \le \sum_{i=0}^{\infty} [v(x_t,t) - v(x_{t+1},t+1)] = x_0^\top X_0 x_0 = \omega. \tag{6.45}$$

Матриця M_0 у (6.44) містить вираз оператора $\mathbf{D}_0(K) = (I_m - KD_0)^{-1}K$, де $D_0 = D(0,t)$. Використовуючи властивість (3.42) цього оператора, запишемо матричну нерівність (6.44) у вигляді $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \le 0$, де

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^\top \mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K})U + V^\top \mathbf{D}_*^\top(\widetilde{K})\widehat{R}\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V,$$

$W = M_*^\top X_{t+1} M_* - X_t + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $U = B_*^\top X_{t+1} M_* + N_*^\top + R_* K_* C$, $V = C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $\widehat{R} = R_* + B_*^\top X_{t+1} B_*$, $\Phi_* = L_*^\top \Phi L_*$, $L_*^\top = \left[I_n, C^\top \mathbf{D}^\top(K_*)\right]$, $B_* = BG^{-1}$, $D_* = DG^{-1}$, $N_* = NG^{-1}$, $R_* = G^{-1\top} R G^{-1}$, $G = I_m - K_* D$.

Застосовуючи лему 8.10 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, отримуємо такий результат.

Теорема 6.6 *Нехай для деяких матриць $X_t = X_t^\top$ і $K_*(x_t,t)$ виконуються співвідношення* (6.32) *і*

$$B^\top X_{t+1} B + D^\top Q D + R < G^\top P G, \tag{6.46}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_X + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n & \mathbf{U}_X^\top + N_* + C^\top K_*^\top R_* & C_*^\top \\ \mathbf{U}_X + N_*^\top + R_* K_* C & \mathbf{R}_X + R_* - P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{6.47}$$

де $\varepsilon_0 > 0$, $\mathbf{W}_X = M_*^\top X_{t+1} M_* - X_t$, $\mathbf{U}_X = B_*^\top X_{t+1} M_*$, $\mathbf{R}_X = B_*^\top X_{t+1} B_*$, $x_t = 0$, $t \in \mathcal{T}$. Тоді будь-яке керування (6.26), (6.28) *забезпечує асимптотичну стійкість стану $x_t \equiv 0$ системи* (6.24), *спільну функцію Ляпунова $v(x,t) = x^\top X_t x$ та оцінку функціонала якості $J_u(x_0) \le v(x_0,0) = x_0^\top X_0 x_0$.*

Твердження теореми 6.6 виконується для сім'ї систем (6.24), (6.36), якщо замість (6.47) використати систему матричних нерівностей

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ijk} + \Phi_k + \varepsilon_0 I_n & \mathbf{U}_{ijk}^\top + N_* + C_k^\top K_*^\top R_* & C_{*k}^\top \\ \mathbf{U}_{ijk} + N_*^\top + R_* K_* C_k & \mathbf{R}_j + R_* - P & D_*^\top \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6.48}$$

де $\mathbf{W}_{ijk} = M_{ijk}^\top X_{t+1} M_{ijk} - X_t$, $M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_k$, $\mathbf{U}_{ijk} = B_{*j}^\top X_{t+1} M_{ijk}$, $\mathbf{R}_j = B_{*j}^\top X_{t+1} B_{*j}$, $B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1}$, $\Phi_k = L_k^\top \Phi L_k$, $L_k^\top = \left[I_n, C_k^\top \mathbf{D}^\top(K_*)\right]$, $C_{*k} = (I_l - DK_*)^{-1} C_k$, $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $\varepsilon_0 > 0$, $x_t = 0$, $t \in \mathcal{T}$.

Наслідок 6.4 *Нехай для деяких матриць* $X_t = X_t^\top$ *і* $K_*(x_t, t)$ *виконуються співвідношення* (6.32) *і* (6.48)*. Тоді будь-яке керування* (6.26), (6.28) *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x_t \equiv 0$ *сім'ї систем* (6.24), (6.36)*, спільну функцію Ляпунова* $v(x,t) = x^\top X_t x$ *та оцінку функціонала якості* $J_u(x_0) \le v(x_0, 0) = x_0^\top X_0 x_0$.

Наведемо наслідок теореми 6.6 для сім'ї систем (6.24), (6.36), (6.38) з використанням системи матричних нерівностей зі сталими матрицями

$$\begin{bmatrix} A_i^\top X A_i - X + S & A_i^\top X B_j + N & C_k^\top \\ B_j^\top X A_i + N^\top & R + B_j^\top X B_j - P & D_s^\top \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6.49}$$

де $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$.

Наслідок 6.5 *Нехай для деякої матриці* $X = X^\top > 0$ *виконується система ЛМН* (6.49) *зі сталими матрицями. Тоді будь-яке керування* (6.26), (6.28) *при* $K_* \equiv 0$ *забезпечує асимптотичну стійкість стану* $x_t \equiv 0$ *сім'ї систем* (6.24), (6.36), (6.38)*, спільну квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^\top X x$ *та оцінку функціонала якості* $J_u(x_0) \le v(x_0) = x_0^\top X x_0$.

6.4 Узагальнене H_∞-керування для дискретних систем

Задачу синтезу узагальненого H_∞-керування за виходом та методи її розв'язування, що викладено у розд. 5 для неперервних систем, аналогічно формулюють для систем керування з дискретним часом.

Розглянемо лінійну систему:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t, \quad z_t = Cx_t + Dw_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.50}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^m$ і $z_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, входу та виходу системи. Як w_t може бути вектор керування або вектор обмежених зовнішніх збурень.

Введемо критерій якості системи вигляду

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \tag{6.51}$$

де

$$\varphi(w, x_0) = \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}},$$

$$\|z\|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} z_t^\top Q z_t, \quad \|w\|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^\top P w_t,$$

$Q = Q^\top > 0$, $P = P^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$ — деякі вагові матриці. При цьому припускаємо, що послідовність вхідних сигналів w_t обмежена за узагальненою l_2-нормою $\|w\|_P$, а початковий вектор x_0 невідомий. Вираз (6.51) за фіксованого початкового вектора $x_0 = 0$ позначимо як J_0, при цьому $J_0 \leq J$. Початковий і збурювальний вектори є *найгіршими* щодо критерію якості J, якщо в (6.51) досягається супремум.

Означення 6.1 Систему (6.50) називають *нееспансивною*, якщо для будь-якої обмеженої послідовності w_t її вектор виходу z_t задовольняє умову $\sum\limits_{t=0}^{\tau} z_t^\top Q z_t \leq \sum\limits_{t=0}^{\tau} w_t^\top P w_t + x_0^\top X_0 x_0$ за будь-якого $\tau > 0$, де Q, P і X_0 — додатно визначені матриці.

Очевидно, що критерій якості (6.51) неекспансивної системи задовольняє умову $J \le 1$.

Лема 6.2 *Нерівності $\rho(A) < 1$ і $J_0 < \gamma$ виконуються тоді і лише тоді, коли ЛМН*

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^\top XA - X + C^\top QC & A^\top XB + C^\top QD \\ B^\top XA + D^\top QC & B^\top XB + D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{6.52}$$

має розв'язок $X = X^\top > 0$. Для виконання нерівностей $\rho(A) < 1$ і $J < \gamma$ необхідно і достатньо, щоб була сумісною система ЛМН (6.52) і

$$0 < X < \gamma^2 X_0. \tag{6.53}$$

Твердження достатності леми 6.2 випливають із співвідношення

$$\Delta v(x_t) + z_t^\top Q z_t - \gamma^2 w_t^\top P w_t = \left[x_t^\top, w_t^\top\right] \Phi(X) \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix} < 0,$$

де $\Delta v(x_t) = v(x_{t+1}) - v(x_t)$ — перша різниця функції Ляпунова $v(x) = x^\top X x$ у силу системи (6.50), $t \in \mathcal{T}$. Твердження необхідності можна встановити, подаючи функціонал $\varphi(w, x_0)$ аналогічним виразом з одиничними ваговими матрицями (див. доведення леми 5.1, а також [14]).

Можна встановити, що матрична нерівність (6.52) при $X > 0$ виконується тоді і лише тоді, коли

$$\begin{bmatrix} -X & XA & XB & 0 \\ A^\top X & -X & 0 & C^\top \\ B^\top X & 0 & -\gamma^2 P & D^\top \\ 0 & C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Ця нерівність є лінійною щодо X, а також усіх матричних коефіцієнтів системи (6.50).

На підставі леми 6.2 характеристики J_0 і J системи (6.50) можна визначити як розв'язки відповідних оптимізаційних задач:

$$J_0 = \inf\{\gamma : \Phi(X) < 0,\ X > 0\}.$$

$$J = \inf\left\{\gamma : \Phi(X) < 0,\ 0 < X < \gamma^2 X_0\right\}.$$

Зауваження 6.5 Якщо вхідний сигнал w_t розглядати як структуровану невизначеність у вигляді лінійного зворотного зв'язку за виходом:

$$w_t = \gamma^{-1}\Theta z_t, \quad \Theta^\top P\Theta \le Q, \tag{6.54}$$

то за умови (6.52) леми 6.2 система (6.50) з цією невизначеністю робастно стійка і має спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^\top X x$. Таке твердження є наслідком теореми 6.5 для цього класу систем. На множині функцій (6.54) функціонал $\varphi(w, x_0)$ в (6.51) набуває мінімального значення, якщо $\Theta^\top P\Theta = Q$.

Розглянемо дискретну систему з керованими та спостережуваними виходами:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t, \\ y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u_t. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Тут $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{R}^s$, $z_t \in \mathbb{R}^k$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого та спостережуваного виходів, $t \in \mathcal{T}$.

Нехай J — критерій якості системи вигляду (6.51) стосовно керованого виходу z_t. Цікавими є J-*оптимальні* закони керування, що забезпечують замкненій системі асимптотичну стійкість і мінімальне значення критерію якості J.

Сформулюємо умови досягнення оцінки $J < \gamma$ за допомогою статичного регулятора за спостережуваним виходом

$$u_t = K\, y_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.56}$$

Замкнену систему (6.55), (6.56) за умови (5.18) подають у вигляді

$$x_{t+1} = A_*\, x_t + B_*\, w_t, \quad z_t = C_*\, x_t + D_*\, w_t, \tag{6.57}$$

де $A_* = A + B_2 K_0 C_2$, $B_* = B_1 + B_2 K_0 D_{21}$, $C_* = C_1 + D_{12} K_0 C_2$, $D_* = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21}$ і $K_0 = (I_m - K D_{22})^{-1} K$. Запишемо співвідношення (6.52) для системи (6.57) у вигляді ЛМН щодо K_0:

$$L_0^\top K_0 R_0 + R_0^\top K_0^\top L_0 + \Omega < 0, \tag{6.58}$$

де

$$\Omega = \begin{bmatrix} -X & 0 & A^\top & C_1^\top \\ 0 & -\gamma^2 P & B_1^\top & D_{11}^\top \\ A & B_1 & -X^{-1} & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, R_0^\top = \begin{bmatrix} C_2^\top \\ D_{21}^\top \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_0^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи леми 8.2 і 8.6, отримаємо умови сумісності наведеної нерівності у вигляді співвідношень (5.67) і

$$W_R^\top \Phi_1(X) W_R < 0, \tag{6.59}$$

$$W_L^\top \Psi_1(Y) W_L < 0, \tag{6.60}$$

де $R = \big[C_2,\, D_{21}\big]$, $L = \big[B_2^\top,\, D_{12}^\top\big]$,

$$\Phi_1(X) = \begin{bmatrix} A^\top XA - X + C_1^\top QC_1 & A^\top XB_1 + C_1^\top QD_{11} \\ B_1^\top XA + D_{11}^\top QC_1 & B_1^\top XB_1 + D_{11}^\top QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$\Psi_1(Y) = \begin{bmatrix} AYA^\top - Y + B_1P^{-1}B_1^\top & AYC_1^\top + B_1P^{-1}D_{11}^\top \\ C_1YA^\top + D_{11}P^{-1}B_1^\top & C_1YC_1^\top + D_{11}P^{-1}D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Теорема 6.7 *Для системи* (6.55) *існує стабілізовний регулятор* (6.56), *який забезпечує оцінку* $J < \gamma$, *тоді і лише тоді, коли система співвідношень* (5.24), (6.53), (6.59) *і* (6.60) *сумісна. Матрицю такого регулятора можна визначити як* $K = K_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}$, *де* K_0 *— розв'язок ЛМН* (6.58).

Застосовуючи статичний регулятор за станом, покладемо

$$C_2 = I_n, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix}. \tag{6.61}$$

У цьому випадку умови теореми 6.7 зводяться до системи ЛМН (6.60) і

$$\begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P - \gamma^{-2} D_{11}^\top Q D_{11} & B_1^\top \\ B_1 & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{6.62}$$

з невідомою матрицею Y.

Наслідок 6.6 Для системи (6.55) за умов (6.61) існує стабілізовний статичний регулятор за станом $u_t = Kx_t$, що забезпечує оцінку $J < \gamma$, тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН (6.60) і (6.62).

Розглянемо систему (6.55) з динамічним регулятором

$$\xi_{t+1} = Z\,\xi_t + V\,y_t, \quad u_t = U\,\xi_t + K\,y_t, \quad \xi_0 = 0. \tag{6.63}$$

За умови (5.18) замкнена система (6.55), (6.63) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{A}_*\,\widehat{x}_t + \widehat{B}_*\,w_t, \quad z_t = \widehat{C}_*\,\widehat{x}_t + \widehat{D}_*\,w_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.64}$$

Тут

$$\widehat{x}_t^\top = \left[x^\top,\, \xi_t^\top\right], \quad \widehat{A}_* = \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{C}_2, \quad \widehat{B}_* = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{C}_* = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{C}_2, \quad \widehat{D}_* = D_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \ \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \ \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \left[\,C_1, 0_{k\times r}\,\right], \quad \widehat{D}_{12} = \left[\,D_{12}, 0_{k\times r}\,\right],$$

$$K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K, \quad U_0 = (I_m - KD)^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - DK)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$$

Подамо співвідношення (6.52) для системи (6.64) у вигляді ЛМН щодо $\widehat{K}_0$:

$$\widehat{L}^\top\widehat{K}_0\widehat{R} + \widehat{R}^\top\widehat{K}_0^\top\widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{6.65}$$

де

$$\widehat{R} = \left[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0, 0\,\right] = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+k} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{L} = \left[\, 0, 0, \widehat{B}_2^\top, \widehat{D}_{12}^\top \,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_2^\top & D_{12}^\top \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+r+s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{A}^\top & \widehat{C}_1^\top \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{B}_1^\top & D_{11}^\top \\ \widehat{A} & \widehat{B}_1 & -\widehat{X}^{-1} & 0 \\ \widehat{C}_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Обчислюючи вирази $W_{\widehat{R}}$, $W_{\widehat{L}}$ і застосовуючи леми 6.2, 8.3 і 8.6, отримаємо критерій сумісності ЛМН (6.65) у вигляді співвідношень (6.59), (6.60) і

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{6.66}$$

Теорема 6.8 *Для системи* (6.55) *існує стабілізовний динамічний регулятор* (6.63)*, що забезпечує оцінку* $J < \gamma$*, тоді і лише тоді, коли система співвідношень* (6.53)*,* (6.59)*,* (6.60) *і* (6.66) *сумісна щодо* $X = X^\top > 0$ *і* $Y = Y^\top > 0$*. Матриці такого регулятора можна визначити за допомогою співвідношень* (5.29) *і* (6.65).

На підставі теорем 6.7 і 6.8 можна побудувати алгоритми синтезу статичних і динамічних регуляторів, що забезпечують робастну стійкість та оцінку критерію якості $J < \gamma$ дискретних систем керування (див. розд. 5). При побудові наближених J-оптимальних законів керування можна використовувати твердження цих теорем за мінімально можливих значень параметра γ.

Наведемо методи оцінювання локальних характеристик J і J_0 вигляду (6.51) для класу псевдолінійних систем

$$x_{t+1} = A(x_t)\, x_t + B(x_t)\, w_t, \quad z_t = C(x_t)\, x_t + D(x_t)\, w_t, \tag{6.67}$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ — неперервні матричні функції $x \in \mathcal{S}_0$. Повторюючи доведення твердження достатності леми 6.2 для системи (6.67), можна встановити таке твердження.

Лема 6.3 *Нехай для деякої матриці* $X = X^\top > 0$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) \end{bmatrix} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{6.68}$$

де

$$\Phi_{11}(x) = A^\top(x) X A(x) - X + C^\top(x) Q C(x),$$
$$\Phi_{21}(x) = \Phi_{12}^\top(x) = B^\top(x) X A(x) + D^\top(x) Q C(x),$$
$$\Phi_{22}(x) = B^\top(x) X B(x) + D^\top(x) Q D(x) - \gamma^2 P.$$

Тоді для критерію якості J_0 *системи* (6.67) *виконується оцінка* $J_0 \le \gamma$. *Якщо, крім того,* $0 < X \le \gamma^2 X_0$, *то* $J \le \gamma$.

Розглянемо нелінійну систему керування:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A(x_t)\,x_t + B_1(x_t)\,w_t + B_2(x_t)\,u_t, \\ z_t &= C_1(x_t)\,x_t + D_{11}(x_t)\,w_t + D_{12}(x_t)\,u_t, \\ y_t &= C_2(x_t)\,x_t + D_{21}(x_t)\,w_t + D_{22}(x_t)\,u_t, \end{aligned} \tag{6.69}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{R}^s$, $z_t \in \mathbb{R}^k$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого та спостережуваного виходів, $t \in \mathcal{T}$. Припустимо, що всі матричні коефіцієнти в (6.69) є неперервними функціями $x \in \mathcal{S}_0$, а матриці $R(x) = \big[C_2(x), D_{21}(x)\big]$ і $L(x) = \big[B_2^\top(x), D_{12}^\top(x)\big]$ мають сталий ранг.

Наведемо достатні умови досягнення оцінки $J \le \gamma$ в системі (6.69) за допомогою динамічного регулятора

$$\xi_{t+1} = Z(\xi_t)\,\xi_t + V(\xi_t)\,y_t, \quad u_t = U(\xi_t)\,\xi_t + K(\xi_t)\,y_t, \quad \xi_0 = 0, \tag{6.70}$$

де $\xi_t \in \mathcal{R}_0 \subseteq \mathbb{R}^r$, $t \in \mathcal{T}$. За умови

$$\det\big[I_m - K(\xi) D_{22}(x)\big] \ne 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad \xi \in \mathcal{R}_0, \tag{6.71}$$

замкнену систему (6.69), (6.70) подають у вигляді

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{A}_*(\widehat{x}_t)\widehat{x}_t + \widehat{B}_*(\widehat{x}_t) w_t, \quad z_t = \widehat{C}_*(\widehat{x}_t)\,\widehat{x}_t + \widehat{D}_*(\widehat{x}_t)\,w_t. \tag{6.72}$$

Тут структура матриць $\widehat{A}_*$, $\widehat{B}_*$, $\widehat{C}_*$ і $\widehat{D}_*$, що залежать від $\widehat{x}_t$, така сама, як в (6.64).

Повторюючи доведення теореми 6.8 та застосовуючи лему 6.3 для системи (6.72), отримуємо співвідношення (6.66) і

$$W_{R(x)}^{\top}\Phi(x)W_{R(x)} < 0, \quad W_{L(x)}^{\top}\Psi(x)W_{L(x)} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{6.73}$$

де

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(x) & \Psi_{12}(x) \\ \Psi_{21}(x) & \Psi_{22}(x) \end{bmatrix},$$

$$\begin{gathered}
\Phi_{11}(x) = A^{\top}(x)XA(x) - X + C_1^{\top}(x)QC_1(x), \\
\Phi_{12}(x) = \Phi_{21}^{\top}(x) = A^{\top}(x)XB_1(x) + C_1^{\top}(x)QD_{11}(x), \\
\Phi_{22}(x) = B_1^{\top}(x)XB_1(x) + D_{11}^{\top}(x)QD_{11}(x) - \gamma^2 P, \\
\Psi_{11}(x) = A(x)YA^{\top}(x) - Y + B_1(x)P^{-1}B_1^{\top}(x), \\
\Psi_{12}(x) = \Psi_{21}^{\top}(x) = A(x)YC_1^{\top}(x) + B_1(x)P^{-1}D_{11}^{\top}(x), \\
\Psi_{22}(x) = C_1(x)YC_1^{\top}(x) + D_{11}(x)P^{-1}D_{11}^{\top}(x) - \gamma^2 Q^{-1}.
\end{gathered}$$

Теорема 6.9 *Нехай існує матриця X, що задовольняє співвідношення* (6.66), (6.73) *і* $0 < X \le \gamma^2 X_0$. *Тоді для системи* (6.69) *існує стабілізовний динамічний регулятор* (6.70)*, що забезпечує оцінку* $J \le \gamma$.

Зазначимо, що методи синтезу систем (6.55) і (6.69) за допомогою динамічних регуляторів (6.63) або (6.70) формально зводяться до побудови статичних регуляторів для аналогічних систем у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$ (див. зауваження 5.3 для неперервних систем).

6.5 Допустимі дискретні дескрипторні системи

Розглянемо лінійну дескрипторну систему:

$$Ex_{t+1} = Ax_t + Bw_t, \quad z_t = Cx_t + Dw_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.74}$$

де $\operatorname{rank} E = \rho \le n$. В'язку матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ називають *допустимою*, якщо вона *регулярна*, *стійка* і *причинна*, тобто відповідно $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), $|\lambda| < 1$ ($\lambda \in \sigma(A_1)$) і $N = 0$ (див. формулу (5.36)).

Дескрипторну систему (6.74) називають *стійкою*, *причинною* та *допустимою*, якщо в'язка матриць $F(\lambda)$ відповідно стійка, причинна та допустима. Властивість причинності дискретної системи (6.74) є аналогом властивості неімпульсності неперервної системи (5.34) [17]. Наведемо динамічну підсистему причинної системи:

$$x_{1\,t+1} = A_1\, x_{1\,t} + B_1\, w_t, \quad z_t = C_1\, x_{1\,t} + D_1\, w_t, \tag{6.75}$$

де

$$x_t = R \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix},\ LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ CR = \begin{bmatrix} C_1, C_2 \end{bmatrix},\ D_1 = D - C_2 B_2.$$

$x_{1\,t} \in \mathbb{R}^r$, $x_{2\,t} \in \mathbb{R}^{n-r}$, L і R — невироджені матриці перетворення в'язки $F(\lambda)$ до канонічної форми Веєрштрасса (5.36).

Лема 6.4 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *система* (6.74) *є допустимою;*

2) *існує невироджена матриця* $X = X^\top$*, яка задовольняє систему ЛМН*

$$A^\top X A - E^\top X E < 0, \quad E^\top X E \geq 0;$$

3) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* $\Delta = \Delta^\top$*, що задовольняють співвідношення*

$$A^\top \big(S + \Delta\big) A - E^\top S E < 0, \quad E^\top \Delta E = 0;$$

4) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* F*, що задовольняють ЛМН*

$$A^\top S A - E^\top S E + F E_0^\top A + A^\top E_0 F^\top < 0,$$

де $E_0 = W_{E^\top}$.

Еквівалентність тверджень 1 та 2 леми 6.4 встановлено в [121], а доведення еквівалентності тверджень 1 та 4 наведено в [152]. Очевидно, що твердження 2 є наслідком твердження 3, оскільки $E^\top X E = E^\top S E$ при $X = S + \Delta$. Навпаки, якщо у твердженні 2

$$X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^\top & X_3 \end{bmatrix} L,\ LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},\ LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

то $N = 0$, $X_1 = X_1^\top > 0$, $X_1 - A_1^\top X_1 A_1 > 0$ і матриці S і Δ у твердженні 3 можна побудувати у вигляді

$$S = X - \Delta = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 - \Delta_2 \\ X_2^\top - \Delta_2^\top & X_3 - \Delta_3 \end{bmatrix} L, \ \Delta = L^\top \begin{bmatrix} 0 & \Delta_2 \\ \Delta_2^\top & \Delta_3 \end{bmatrix} L, \tag{6.76}$$

де $\Delta_3 < X_3 - (X_2 - \Delta_2)^\top X_1^{-1}(X_2 - \Delta_2)$.

У [154] встановлено, що система (6.74) є допустимою тоді і лише тоді, коли

$$A^\top (S + E_0 T E_0^\top) A - E^\top S E < 0$$

для деяких матриць $S = S^\top > 0$ і $T = T^\top$. Це є наслідком еквівалентності тверджень 1 і 3 леми 6.4 у разі використання розв'язків матричного рівняння $E^\top \Delta E = 0$ типу $\Delta = E_0 T E_0^\top$. Довільний симетричний розв'язок цього рівняння у випадку $N = 0$ має таку структуру:

$$\Delta = E_0 G^\top + G E_0^\top = L^\top \begin{bmatrix} 0 & G_1 \\ G_1^\top & G_2 + G_2^\top \end{bmatrix} L. \tag{6.77}$$

Тут

$$G = L^\top \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \ E_0 = L^\top \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Нехай J_0 і J — критерії якості системи (6.74) вигляду (6.51), визначені для множини пар (w, x_0), за яких дана система має розв'язок. Для допустимої системи (6.74) значення J_0 та J визначаються аналогічними характеристиками підсистеми (6.75). Далі припускаємо, що $X_0 = E^\top H E$, де $H = H^\top > 0$.

Для системи (6.74) визначимо матричні оператори:

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^\top XA - E^\top XE + C^\top QC & A^\top XB + C^\top QD \\ B^\top XA + D^\top QC & B^\top XB + D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon(\Delta) = \big[A,\, B\big]^\top \Delta \big[A,\, B\big], \ \ \Upsilon_1(F) = \big[A,\, B\big]^\top E_0 F^\top + F E_0^\top \big[A,\, B\big].$$

Лема 6.5 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *система* (6.74) *є допустимою і* $J_0 < \gamma$*;*

2) *існує матриця* $X = X^\top$, *що задовольняє систему ЛМН*

$$\Phi(X) < 0, \quad E^\top X E \geq 0;$$

3) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* $\Delta = \Delta^\top$, *що задовольняють співвідношення*

$$\Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0, \quad E^\top \Delta E = 0;$$

4) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* $T = T^\top$, *що задовольняють ЛМН*

$$\Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0, \quad \Delta = E_0 T E_0^\top;$$

5) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* G, *що задовольняють ЛМН*

$$\Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0, \quad \Delta = E_0 G^\top + G E_0^\top;$$

6) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* F, *що задовольняють ЛМН*

$$\Phi(S) + \Upsilon_1(F) < 0.$$

Доведення. Покладемо $\widetilde{w}_t = \widetilde{P} w_t$ і $\widetilde{z}_t = \widetilde{Q} z_t$, де $\widetilde{P}$ і $\widetilde{Q}$ — множники в розкладах додатно визначених матриць $P = \widetilde{P}^\top \widetilde{P}$ і $Q = \widetilde{Q}^\top \widetilde{Q}$. Тоді система (6.74) набуває вигляду

$$Ex_{t+1} = Ax_t + \widetilde{B}\widetilde{w}_t, \quad \widetilde{z}_t = \widetilde{C}x_t + \widetilde{D}\widetilde{w}_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.78}$$

де $\widetilde{B} = B\widetilde{P}^{-1}$, $\widetilde{C} = \widetilde{Q}C$ і $\widetilde{D} = \widetilde{Q}D\widetilde{P}^{-1}$. При цьому $\|z\|_Q = \|\widetilde{z}\|_{I_k}$, $\|w\|_P = \|\widetilde{w}\|_{I_s}$ і

$$\Phi(X) = U^\top \widetilde{\Phi}(X) U, \quad U = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \widetilde{P} \end{bmatrix}, \tag{6.79}$$

$$\widetilde{\Phi}(X) = \begin{bmatrix} A^\top X A - E^\top X E + \widetilde{C}^\top \widetilde{C} & A^\top X \widetilde{B} + \widetilde{C}^\top \widetilde{D} \\ \widetilde{B}^\top X A + \widetilde{D}^\top \widetilde{C} & \widetilde{B}^\top X \widetilde{B} + \widetilde{D}^\top \widetilde{D} - \gamma^2 I_s \end{bmatrix}.$$

Згідно з [121] система (6.78) є допустимою і її критерій якості $\widetilde{J}_0 = J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН $\widetilde{\Phi}(X) < 0$ і $E^\top X E \geq 0$. Оскільки $\widetilde{\Phi}(X) < 0 \Leftrightarrow \Phi(X) < 0$, то твердження 1 і 2 є еквівалентними (див. також [66]).

Очевидно, що твердження 2 є наслідком твердження 3. Дійсно, якщо шукати розв'язок нерівності $\Phi(X) < 0$ у вигляді $X = S + \Delta$ при $S = S^\top > 0$, то $\Phi(X) = \Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0$ і $E^\top X E = E^\top S E \geq 0$. Навпаки, в разі виконання твердження 2 з матрицею X система (6.74) є допустимою і матриці S і Δ в твердженні 3 можна вибрати у вигляді (6.76). Отже, твердження 2 і 3 є еквівалентними.

Оскільки виконуються співвідношення (6.79) і

$$\Phi(S) + \Upsilon(\Delta) = U^\top \big[\widetilde{\Phi}(S) + \widetilde{\Upsilon}(\Delta)\big]U, \quad \widetilde{\Upsilon}(\Delta) = \big[A,\, \widetilde{B}\big]^\top \Delta \big[A,\, \widetilde{B}\big],$$

то згідно з [154] система (6.78) є допустимою і її критерій якості $\widetilde{J}_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли $\widetilde{\Phi}(S) + \widetilde{\Upsilon}(\Delta) < 0$ і $\Delta = E_0\, T\, E_0^\top$ для деяких матриць $S = S^\top > 0$ і $T = T^\top$. Це означає, що твердження 1 і 4 є еквівалентними. Аналогічно, еквівалентність тверджень 1 і 6 є наслідком теореми 5.6 із [152] та співвідношень (6.79) і

$$\Phi(S) + \Upsilon_1(F) = U^\top \big[\widetilde{\Phi}(S) + \widetilde{\Upsilon}_1(\widetilde{F})\big]U,$$

$$\widetilde{\Upsilon}_1(\widetilde{F}) = \big[\,A,\, \widetilde{B}\,\big]^\top E_0 \widetilde{F}^\top + \widetilde{F} E_0^\top \big[\,A,\, \widetilde{B}\,\big],$$

де $\widetilde{F} = U^{-1\top} F$.

Еквівалентність тверджень 3 і 5 випливає із зображення довільного розв'язку рівняння $E^\top \Delta E = 0$ у вигляді (6.77). $\square$

Лема 6.6 *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *система* (6.74) *є допустимою і* $J < \gamma$*;*

2) *існує матриця* $X = X^\top$*, що задовольняє співвідношення*

$$\Phi(X) < 0, \quad 0 \leq E^\top X E \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}\big(E^\top X E - \gamma^2 X_0\big) = \rho; \tag{6.80}$$

3) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* $\Delta = \Delta^\top$*, що задовольняють співвідношення*

$$\Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0, \quad E^\top \Delta E = 0, \quad S < \gamma^2 H; \tag{6.81}$$

4) *існують матриці* $S = S^\top > 0$ *і* G*, що задовольняють систему ЛМН*

$$\Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0, \quad \Delta = E_0 G^\top + G E_0^\top, \quad S < \gamma^2 H. \tag{6.82}$$

Доведення. Застосуємо конгруентне перетворення

$$V^\top \Phi(X) V = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\Phi_1(X_1)} & \begin{array}{c} A_1^\top X_2 + C_1^\top Q C_2 \\ B_1^\top X_2 + D_1^\top Q C_2 \end{array} \\ \hline X_2^\top A_1 + C_2^\top Q C_1 & X_2^\top B_1 + C_2^\top Q D_1 & X_3 + C_2^\top Q C_2 \end{array}\right], \tag{6.83}$$

де

$$V = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & I_{n-r} \\ \hline 0 & I_s & 0 \end{array}\right], \quad X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^\top & X_3 \end{bmatrix} L.$$

За умов (6.80) система (6.74) є допустимою (див. лему 6.5) і виконуються такі співвідношення:

$$\Phi_1(X_1) < 0, \quad 0 < X_1 < \gamma^2 H_1, \tag{6.84}$$

$$E^\top X E - \gamma^2 X_0 = R^{-1\top} \begin{bmatrix} X_1 - \gamma^2 H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1} \leq 0,$$

$$x_0^\top X_0 x_0 = x_{1,0}^\top H_1 x_{1,0}, \quad H = L^\top \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix} L > 0.$$

При цьому $\rho(A_1) < 1$ і $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли система ЛМН (6.84) сумісна [63].

Отже, в разі виконання співвідношень (6.80) система (6.74) допустима і її критерій якості $J < \gamma$. Навпаки, якщо система (6.74) допустима і $J < \gamma$, то $\rho(A_1) < 1$ і для деякої матриці $X_1 = X_1^\top$ виконуються співвідношення (6.84). При цьому, якщо покласти $X_2 = 0$ і $X_3 = -C_2^\top Q C_2 - \varepsilon^{-1} I_{n-r}$, то згідно з (6.83) і лемою Шура матрична нерівність $\Phi(X) < 0$ набуває вигляду

$$\Phi_1(X_1) + \varepsilon \begin{bmatrix} C_1^\top \\ D_1^\top \end{bmatrix} Q C_2 C_2^\top Q \big[C_1, D_1\big] < 0.$$

Умова $\Phi_1(X_1) < 0$ дає змогу вибрати таке $\varepsilon > 0$, при якому ця нерівність виконується. Це означає, що твердження 2 є наслідком твердження 1.

Якщо виконуються співвідношення (6.81), то матриця $X = S + \Delta$ задовольняє співвідношення (6.80), тобто твердження

2 є наслідком твердження 3. Навпаки, якщо для деякої матриці X виконуються співвідношення (6.80), то матриці S і Δ, що задовольняють (6.81), можна побудувати у вигляді (6.76). При цьому $0 < X_1 < \gamma^2 H_1$ і на підставі леми 8.8 можна вибрати блоки Δ_2 і Δ_3 так, щоб

$$0 < \begin{bmatrix} X_1 & X_2 - \Delta_2 \\ X_2^\top - \Delta_2^\top & X_3 - \Delta_3 \end{bmatrix} < \gamma^2 \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix},$$

тобто $0 < S < \gamma^2 H$.

Еквівалентність тверджень 3 і 4 є наслідком зображення довільного розв'язку рівняння $E^\top \Delta E = 0$ у вигляді (6.77). □

Із лем 6.5 і 6.6 випливають алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (6.74) на базі розв'язування відповідних оптимізаційних задач. Наприклад,

$$J = \inf \big\{ \gamma : \ \Phi(S) + \Upsilon(\Delta) < 0, \ 0 < S < \gamma^2 H, \ E^\top \triangle E = 0 \big\}.$$

На підставі лем 6.5 і 6.6 здійснюється синтез узагальнених H_∞-регуляторів для класу дескрипторних систем

$$\begin{aligned} Ex_{t+1} &= A\,x_t + B_1\,w_t + B_2\,u_t, \\ z_t &= C_1\,x_t + D_{11}\,w_t + D_{12}\,u_t, \\ y_t &= C_2\,x_t + D_{21}\,w_t + D_{22}\,u. \end{aligned} \tag{6.85}$$

У разі використання статичного регулятора (6.56) замкнена система має вигляд

$$Ex_{t+1} = A_* x_t + B_* w_t, \quad z_t = C_* x_t + D_* w_t, \tag{6.86}$$

де

$$\begin{bmatrix} A_* & B_* \\ C_* & D_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} K_0 \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}.$$

Запишемо матричну нерівність $\Phi(X) < 0$ для системи (6.86) у вигляді квадратичної матричної нерівності щодо K_0:

$$\Phi_*(X) = W(X) + U^\top(X) K_0 V + V^\top K_0^\top U(X) + V^\top K_0^\top R(X) K_0 V < 0, \tag{6.87}$$

де

$$W(X)=\begin{bmatrix} A^\top XA-E^\top XE+C_1^\top QC_1 & A^\top XB_1+C_1^\top QD_{11} \\ B_1^\top XA+D_{11}^\top QC_1 & B_1^\top XB_1+D_{11}^\top QD_{11}-\gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$U(X)=\big[B_2^\top XA+D_{12}^\top QC_1,\, B_2^\top XB_1+D_{12}^\top QD_{11}\big],$$

$$V=\big[C_2,\, D_{21}\big],\quad R(X)=B_2^\top XB_2+D_{12}^\top QD_{12}.$$

Якщо виконуються додаткові умови

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}=m,\quad \operatorname{rank}\big[\,E,B_2\,\big]=\rho, \tag{6.88}$$

то $R(X)=B_2^\top SB_2+D_{12}^\top QD_{12}>0$ при $X=S+\Delta$, $S=S^\top>0$ і $E^\top\Delta E=0$. Друга умова в (6.88) означає, що $B_2=EZ$ для деякої матриці Z.

Отже, застосовуючи леми 6.5, 6.6 і 8.7, маємо таке твердження.

Теорема 6.10 *Нехай існують матриці $S=S^\top>0$ і $G=G^\top$, при яких виконуються співвідношення*

$$R(X)>0,\quad W(X)<U^\top(X)R^{-1}(X)U(X),\quad W_V^\top W(X)W_V<0, \tag{6.89}$$

де $X=S+E_0G^\top+GE_0^\top$. Тоді існує керування (6.56)*, за якого замкнена система* (6.86) *є допустимою і має критерій якості $J_0<\gamma$. При цьому $J<\gamma$, якщо разом з* (6.89) *$S<\gamma^2H$.*

Якщо система (6.86) *допустима і $J<\gamma$, то за додаткових умов* (6.88) *існують матриці $S=S^\top>0$ і $G=G^\top$, що задовольняють співвідношення* (6.89) *і $S<\gamma^2H$.*

За умов теореми 6.10 матрицю шуканого регулятора (6.56) можна побудувати як $K=K_0(I_l+D_{22}K_0)^{-1}$, де K_0 — розв'язок квадратичної матричної нерівності (6.87). Зазначимо, що у випадку застосування статичного регулятора за станом $V=\big[I_n,\,0\big]$ і $W_V^\top=\big[0,\,I_s\big]$, при цьому остання нерівність у (6.89) спрощується до вигляду $B_1^\top XB_1<\gamma^2P-D_{11}^\top QD_{11}$.

Визначимо у просторі матриць регулятора (6.56) еліпсоїд

$$\mathcal{K}=\big\{K\in\mathbb{R}^{m\times l}:\, K^\top\Lambda K\le\Theta\big\},\quad \Lambda=\Lambda^\top>0,\quad \Theta=\Theta^\top>0.$$

На підставі лем 6.5, 6.6, 8.10 і співвідношення (6.87) маємо такий результат.

Теорема 6.11 *Нехай для деяких матриць* $S = S^\top > 0$ *і* $G = G^\top$ *виконується система ЛМН:*

$$R(X) \geq 0, \quad \begin{bmatrix} W(X) + V^\top \Theta V & U^\top(X) + V^\top \Theta D_{22} \\ U(X) + D_{22}^\top \Theta V & R(X) + D_{22}^\top \Theta D_{22} - \Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{6.90}$$

де $X = S + E_0 G^\top + G E_0^\top$. *Тоді для будь-якого керування* (6.56) *при* $K \in \mathcal{K}$ *замкнена система* (6.86) *є допустимою і* $J_0 < \gamma$. *При цьому* $J < \gamma$ *для цієї множини керувань, якщо разом з* (6.90) $S < \gamma^2 H$.

Зазначимо, що матриці Λ і Θ, які визначають еліпсоїд $\mathcal{K}$, входять у вираз (6.90) лінійно. Тому в теоремі 6.11 вони можуть бути як заданими, так і шуканими компонентами розв'язку ЛМН (6.90). Очевидно, що для виконання умов (6.90) необхідно, щоб $D_{22}^\top \Theta D_{22} < \Lambda$. За додаткових умов (6.88) перша нерівність у (6.90) виконується автоматично.

Можна отримати аналоги теорем 6.10 і 6.11 для системи (6.74) з динамічним регулятором типу (6.63), застосовуючи зображення замкненої системи у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+r}$ зі статичним регулятором.

Розділ 7

Позитивні та монотонні динамічні системи

У теорії систем та її застосуваннях використовуються неперервні та дискретні моделі динамічних об'єктів, стани яких мають певні властивості щодо деякого конуса фазового простору (позитивність, монотонність, кооперативність тощо). Ці властивості можуть бути зумовлені самою природою досліджуваного об'єкта або структурою проєктованої системи керування (див., наприклад, [36, 109, 120]). Класи позитивних і монотонних систем виникають у теорії стійкості як системи порівняння [2, 41, 52, 82]. Деякі моделі біологічних та соціальних систем мають властивості типу кооперативності чи конкуренції, які визначаються за допомогою конуса невід'ємних векторів [120].

Цей розділ присвячено вивченню та використанню в задачах стійкості властивостей динамічних систем, що узагальнюють поняття позитивності та монотонності щодо конуса.

7.1 Означення та допоміжні факти

Опуклу замкнену множину $\mathcal{K}$ дійсного нормованого простору $\mathcal{E}$ називають *клином*, якщо $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}\ \forall \alpha, \beta \geq 0$. Клин $\mathcal{K}$ є *конусом*, якщо його *лезо* $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$. Простір з конусом є *напівупорядкованим*: $X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y \Longleftrightarrow Y - X \in \mathcal{K}$. *Тілесний* конус $\mathcal{K}$ складається із множини внутрішніх точок $\operatorname{int}\mathcal{K} = \left\{X : X \overset{\mathcal{K}}{>} 0\right\} \neq \emptyset$ і межі $\partial\mathcal{K}$. Ненульові елементи $X \in \mathcal{K}$ позначаються як $X \overset{\mathcal{K}}{\succ} 0$.

Конус $\mathcal{K}$ називають *нормальним*, якщо із $0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$ випливає оцінка $\|X\| \leq \nu\|Y\|$, де ν – універсальна стала. Найменше із таких чисел ν називають *сталою нормальності конуса* $\mathcal{K}$. Властивість нормальності конуса $\mathcal{K}$ еквівалентна виконанню нерівності $\|X\| \le \nu\|V\| + (\nu+1)\|U\|$ зі сталою нормальності ν для будь-якого конусного інтервалу $U \overset{\mathcal{K}}{\le} X \overset{\mathcal{K}}{\le} V$.

Якщо $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ є *відтворювальним*. Відтворювальний конус $\mathcal{K}$ є *несплющеним*, тобто із $X = X_+ - X_-$ і $X_\pm \in \mathcal{K}$ випливає $\|X_\pm\| \le \mu\|X\|$, де μ — універсальна стала.

Типовими прикладами нормальних відтворювальних конусів у скінченновимірних просторах є множини векторів з невід'ємними елементами, круговий конус Мінковського, множина симетричних невід'ємно визначених матриць тощо. (див. підрозд. 8.8).

Множину $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ називають *$\mathcal{K}$–опуклою*, якщо для будь-якої пари точок $X, Y \in \mathcal{D}$ із $X \overset{\mathcal{K}}{\le} Y$ випливає $(1-\gamma)X + \gamma Y \in \mathcal{D}$ при $\gamma \in (0,1)$. Будь-який конус $\mathcal{K}$ і будь-яка опукла множина є $\mathcal{K}$-опуклими.

Спряжений конус $\mathcal{K}^*$ складається із лінійних функціоналів $\varphi \in \mathcal{E}^*$, що набувають невід'ємних значень на $\mathcal{K}$, причому

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{E} : \varphi(X) \ge 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{K}^*\},$$

$$\mathcal{K}^* = \{\varphi \in \mathcal{E}^* : \varphi(X) \ge 0 \ \forall X \in \mathcal{K}\},$$

$$\operatorname{int}\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{K} : \varphi(X) > 0 \ \forall \varphi \ne 0 \in \mathcal{K}^*\},$$

$$\partial\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{K} : \exists \varphi \ne 0 \in \mathcal{K}^*, \ \varphi(X) = 0\}.$$

Функціонал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ називають *рівномірно додатним*, якщо знайдеться таке $\gamma > 0$, що $\varphi(X) \ge \gamma\|X\|$ для всіх $x \in \mathcal{K}$. Рівномірно додатний функціонал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ є строго додатним: $\varphi(X) > 0$ при $X \overset{\mathcal{K}}{\succ} 0$. Конус $\mathcal{K}$ допускає *оштукатурення* $\mathcal{K}_0$, якщо кожна точка $X_0 \in \mathcal{K}$ входить у конус $\mathcal{K}_0$ разом з кульовим околом $\|X - X_0\| \le \delta\|X_0\|$, де $\delta > 0$ не залежить від X_0. Оштукатурюваність конуса $\mathcal{K}$ рівносильна тілесності конуса $\mathcal{K}^*$, а також існуванню рівномірно додатного функціонала $\varphi \in \mathcal{E}^*$. Кожен оштукатурюваний конус є нормальним. У скінченновимірному просторі кожен конус допускає оштукатурення. Конус $\mathcal{K}$ нормальний (відтворювальний) тоді і лише тоді, коли спряжений конус $\mathcal{K}^*$ є відтворювальним (нормальним).

Нехай у банаховому просторі $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ виділено конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $\mathbf{M} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ називають *монотонним*, якщо $X \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} Y \implies \mathbf{M}X \overset{\mathcal{K}_2}{\leq} \mathbf{M}Y$. Монотонність лінійного оператора M рівносильна його *додатності*: $\mathbf{M}\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$. Нерівність між операторами $\mathbf{M}_1 \trianglelefteq \mathbf{M}_2$ означає, що оператор $\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1$ додатний. Якщо оператор $\mathbf{M}$ додатний, то *спряжений оператор* $\mathbf{M}^* : \mathcal{E}_2^* \to \mathcal{E}_1^*$ також додатний ($\mathbf{M}^*\mathcal{K}_2^* \subseteq \mathcal{K}_1^*$). Якщо $\mathbf{M}\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, то оператор $\mathbf{M}$ *всюди додатний*. Додатний оператор $\mathbf{M}$ *рівномірно додатний*, якщо $\|\mathbf{M}X\| \geq \gamma\|X\|$ для деякого $\gamma > 0$ за всіх $X \in \mathcal{K}$.

Лінійний оператор $\mathbf{M}$ називають *додатно оборотним*, якщо $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathbf{M}\mathcal{K}_1$, тобто для будь-якого $Y \in \mathcal{K}_2$ рівняння $\mathbf{M}X = Y$ має розв'язок $X \in \mathcal{K}_1$. Оскільки $(\mathbf{M}^{-1})^* = (\mathbf{M}^*)^{-1}$, то із додатної оборотності оператора $\mathbf{M}$ випливає додатна оборотність оператора $\mathbf{M}^*$. Якщо $\mathcal{K}_2$ — нормальний відтворювальний конус і $\mathbf{M}_1 \trianglelefteq \mathbf{M} \trianglelefteq \mathbf{M}_2$, то із додатної оборотності операторів $\mathbf{M}_1$ і $\mathbf{M}_2$ випливає додатна оборотність оператора $\mathbf{M}$, причому $\mathbf{M}_2^{-1} \trianglelefteq \mathbf{M}^{-1} \trianglelefteq \mathbf{M}_1^{-1}$ [36].

Критерієм додатної оборотності класу операторів

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \mathbf{L}\mathcal{K}_1, \tag{7.1}$$

де $\mathcal{K}_2$ — нормальний відтворювальний конус, є нерівність $\rho(\mathbf{T}) < 1$ ($\rho(\mathbf{T})$ — спектральний радіус в'язки операторів $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{P} - \lambda\mathbf{L}$) [49]. Якщо конус $\mathcal{K}_2$ тілесний, то ця нерівність еквівалентна існуванню елементів $X \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$ і $Y \overset{\mathcal{K}_2}{>} 0$, пов'язаних рівнянням $\mathbf{M}X = Y$.

Оператор $\mathbf{M} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ називають *позадіагонально додатним*, якщо $\varphi(\mathbf{M}X) \geq 0$ для будь-яких $X \in \mathcal{K}$ і $\varphi \in \mathcal{K}^*$ таких, що $\varphi(X) = 0$. Якщо $\mathbf{M} \trianglerighteq \alpha\mathbf{I}$ для деякого α, де $\mathbf{I}$ — тотожний оператор, то оператор $\mathbf{M}$ є позадіагонально додатним. Зворотне твердження справедливе за додаткових обмежень у разі $\alpha \leq -\nu\mu\|\mathbf{M}\|$, де ν і μ — сталі відповідно нормальності та несплющеності $\mathcal{K}$ [125].

Наведемо приклади додатних операторів. Лінійний оператор $\mathbf{M} : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{p\times q}$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{M}X = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{ij}A_{ij}, \quad A_{ij} \in \mathcal{K}_{pq},$$

де $\mathcal{K}_{pq}$ — конус невід'ємних матриць розміру $p \times q$, тоді і лише тоді, коли $\mathbf{M}\mathcal{K}_{nm} \subseteq \mathcal{K}_{pq}$. Зокрема, будь-який лінійний оператор, що зберігає конус невід'ємних векторів $\mathcal{K}_n$, має вигляд $\mathbf{M}x = Ax$ $(A \in \mathcal{K}_{nn})$. Лінійні оператори, що зберігають конус невід'ємно визначених матриць, подають у вигляді [49]

$$\mathbf{M}X = \sum_k A_k X A_k^* + \sum_s B_s X^\top B_s^*, \quad A_k, B_s \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Лінійний інтегральний оператор

$$\mathbf{M}x(t) = \int_\Delta H(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

є додатним щодо конуса невід'ємних функцій $x \in \mathcal{E}$, якщо ядро $H(t,\tau)$ невід'ємне $(t,\tau \in \Delta)$.

Лінійний обмежений оператор $\mathbf{F}'(X_0)$ називають *похідною Гато* від нелінійного оператора $\mathbf{F} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ у точці X_0, якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbf{F}(X_0 + \varepsilon H) - \mathbf{F}X_0\right] = \mathbf{F}'(X_0)H$$

у сенсі сильної збіжності (за нормою). Якщо це співвідношення виконується лише при $H \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$, то $\mathbf{F}'(X_0)$ — *похідна за конусом* $\mathcal{K}_1$ оператора $\mathbf{F}$ [35]. *Похідна Фреше* $\mathbf{F}'(X_0)$ за конусом $\mathcal{K}_1$ визначається співвідношеннями

$$\mathbf{F}(X_0 + H) - \mathbf{F}X_0 = \mathbf{F}'(X_0)H + \mathbf{R}(X_0, H), \quad \mathbf{R}(X_0, H) = o(\|H\|),$$

де $H \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$. Похідна Фреше також є похідною Гато. Якщо похідна Гато неперервна в околі точки X_0, то вона є похідною Фреше. Надалі через $\mathbf{F}'_+(X_0)$ $(\mathbf{F}'_-(X_0))$ позначатимемо похідні Гато і Фреше за конусом $\mathcal{K}_1$ $(-\mathcal{K}_1)$ у точці X_0.

7.2 Класифікація динамічних систем щодо конуса

Нехай в області $\mathcal{D}$ банахового простору $\mathcal{X}$ функціонує *динамічна система* $\mathcal{S}$, стан якої

$$X_t = \mathbf{E}(X_\tau, \tau, t) \in \mathcal{X}, \quad \tau \in \Upsilon, \;\; t \in \Upsilon_\tau, \tag{7.2}$$

де $\mathbf{E}$ — оператор, що визначає перехід з початкового стану X_τ у стан X_t і має властивості

$$\mathbf{E}(X,\tau,\tau)=X,\ \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X,\tau,t),t,s\big)=\mathbf{E}(X,\tau,s),\ t\in\Upsilon_\tau,\ s\in\Upsilon_t,$$

$\Upsilon_\tau=\{t\in\Upsilon : t\geq\tau\}$, $\Upsilon\subseteq\mathbb{R}$ — впорядкована множина індексів.

Система $\mathcal{S}$ є *неперервною*, *дискретною* або *гібридною* залежно від структури множини Υ. У разі дискретного часу $\Upsilon=\{0,1,\dots\}$. Лінійному оператору $\mathbf{E}$ відповідає *лінійна система* $\mathcal{S}$. Зазначимо, що $\mathbf{E}(\cdot,\tau,\tau)\equiv\mathbf{I}$ — тотожний оператор. Якщо $\mathbf{E}(\Theta,\tau,t)\equiv\Theta$, то $X_t\equiv\Theta$ — *стан рівноваги* системи $\mathcal{S}$. Розглядатимемо лише ізольовані стани рівноваги.

Нехай $\mathcal{K}_t$ стала або змінна за часом множина в $\mathcal{X}$. Як $\mathcal{K}_t$ можна використовувати лінійне перетворення $\mathcal{K}_t=\mathbf{L}(t)\mathcal{K}$ сталої множини $\mathcal{K}$. Тоді $\mathcal{K}_t$ є конусом, якщо $\ker\mathbf{L}(t)\equiv\{0\}$ і $\mathcal{K}$ — конус. Якщо $\mathbf{E}(\mathcal{K}_\tau,\tau,t)\subseteq\mathcal{K}_t$ при $t\in\Upsilon_\tau$, то $\mathcal{K}_t$ — *інваріантна множина* системи $\mathcal{S}$. Система є *позитивною* щодо інваріантного конуса $\mathcal{K}_t$. Система $\mathcal{S}$ є *монотонною* щодо конуса $\mathcal{K}_t$, якщо

$$X_\tau\overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq}Y_\tau\quad\Rightarrow\quad X_t=\mathbf{E}(X_\tau,\tau,t)\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}Y_t=\mathbf{E}(Y_\tau,\tau,t)\tag{7.3}$$

за будь-яких $\tau\in\Upsilon$ і $t\in\Upsilon_\tau$. Позитивну (монотонну) динамічну систему $\mathcal{S}$ визначає додатний (монотонний) оператор $\mathbf{E}$. Позначимо класи монотонних та позитивних систем щодо $\pm\mathcal{K}_t$ відповідно як $\mathcal{M}$ та $\mathcal{M}_0^\pm$.

Розглянемо множини

$$\mathcal{K}_t^+(\Theta)=\big\{X\in\mathcal{X} : X\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}\Theta\big\},\quad \mathcal{K}_t^-(\Theta)=\big\{X\in\mathcal{X} : X\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}\Theta\big\},$$

де $\Theta\in\mathcal{X}$, $\mathcal{K}_t$ — конус. Для класів систем з інваріантними множинами $\mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$ використовуємо позначення $\mathcal{M}_0^\pm(\Theta)$. Позначимо класи систем, що мають властивість (7.3) при $Y_\tau\in\mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$, $X_\tau\in\mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$, $X_\tau\in\mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$ і $Y_\tau\in\mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$, відповідно як $\mathcal{M}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_1^-(\Theta)$ і $\mathcal{M}_2^-(\Theta)$. Очевидно, що

$$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}_1^\pm(\Theta)\subseteq\mathcal{M}_2^\pm(\Theta),\quad \mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}_1(\Theta)\subseteq\mathcal{M}_2(\Theta),$$

де $\mathcal{M}_1(\Theta)=\mathcal{M}_1^+(\Theta)\cap\mathcal{M}_1^-(\Theta)$, $\mathcal{M}_2(\Theta)=\mathcal{M}_2^+(\Theta)\cap\mathcal{M}_2^-(\Theta)$. Система класу $\mathcal{M}_2^\pm(\Theta)$ є монотонною в $\mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$. Кожна система з $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$,

$\mathcal{M}_2^-(\Theta)$ або $\mathcal{M}_2(\Theta)$, що має стан рівноваги $X_t \equiv \Theta$, належить відповідно $\mathcal{M}_0^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_0^-(\Theta)$ або $\mathcal{M}_0(\Theta) = \mathcal{M}_0^+(\Theta) \cap \mathcal{M}_0^-(\Theta)$. Лінійна система $\mathcal{S}$, позитивна щодо конуса $\mathcal{K}_t$, належить кожному із запроваджених класів систем.

Опишемо введені класи систем $\mathcal{S}$ зі станами (7.2) за допомогою включень

$$\mathbf{E}'_\pm(X,\tau,t)\,\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad X \in \mathcal{D},\ \tau \in \Upsilon,\ t \in \Upsilon_\tau, \tag{7.4}$$

де $\mathbf{E}'_\pm(X,\tau,t)$ — похідні Гато оператора $\mathbf{E}(X,\tau,t)$ за відповідними конусами $\pm\mathcal{K}_\tau$. Належність системи $\mathcal{S}$ певним класам позначатимемо символом $\in$.

Лема 7.1 *Нехай оператор $\mathbf{E}(X,\tau,t)$ диференційований за Гато щодо $\pm\mathcal{K}_\tau$ у $\mathcal{K}_\tau$-опуклій області $\mathcal{D}$ при $\tau \in \Upsilon$, $t \in \Upsilon_\tau$. Тоді:*

(i) *належність $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ еквівалентна одному із включень* (7.4)*;*

(ii) *$\mathcal{S} \in \mathcal{M}_0^\pm(\Theta)$, якщо $\mathbf{E}(\Theta,\tau,t) - \Theta \in \pm\mathcal{K}_t$ і включення* (7.4) *виконується при $X \in \mathcal{K}_\tau^\pm(\Theta)$;*

(iii) *належність $\mathcal{S} \in \mathcal{M}_2^\pm(\Theta)$ еквівалентна включенню* (7.4) *при $X \in \mathcal{K}_\tau^\pm(\Theta)$.*

Твердження необхідності (i) та (iii) в лемі 7.1 доводяться на базі означень відповідних класів систем $\mathcal{S}$ та похідних Гато:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big[\mathbf{E}(X+\varepsilon H,\tau,t)-\mathbf{E}(X,\tau,t)\big]=\mathbf{E}'_\pm(X,\tau,t)H,\ X \in \mathcal{D},\ H \in \mathcal{K}_\tau^\pm.$$

Достатність тверджень (i)—(iii) випливає зі співвідношення типу Лагранжа [35]:

$$\varphi\big(\mathbf{E}(X+H,\tau,t)-\mathbf{E}(X,\tau,t)\big)=\varphi\big(\mathbf{E}'_\pm(Z,\tau,t)H\big),$$

де $\varphi \in \mathcal{X}^*$, $Z = X + \mu H \in \mathrm{Co}\{X, X+H\}$, $0 < \mu < 1$, X і $X+H$ — довільні точки деякої опуклої множини. З цією метою використовуємо лише функціонали $\varphi \in \pm\mathcal{K}_t^*$ і властивість $\mathcal{K}_\tau$-опуклості $\mathcal{D}$. Крім того, $Z = (1-\mu)X + \mu(X+H) \in \mathcal{D}$ при $X \in \mathcal{D}$ і $H \in \pm\mathcal{K}_\tau$.

Диференціальні системи. Розглянемо нелінійну диференціальну систему:

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X,t), \quad t \ge \tau \ge 0, \tag{7.5}$$

де $\mathbf{F}$ — неперервна оператор-функція, що задовольняє умови існування та єдиності неперервно диференційованого розв'язку $X(t) = \mathbf{E}(X_\tau, \tau, t)$ для будь-яких $\tau \geq 0$ і $X_\tau \in \mathcal{D}$. Нехай $\mathcal{K}_t$ — конус у фазовому просторі $\mathcal{X}$. Наприклад, перетворення Ляпунова $\mathcal{K}_t = \mathbf{L}(t)\mathcal{K}$ сталого конуса $\mathcal{K}$, заданого у просторі системи

$$\dot{Z} = \mathbf{G}(Z,t), \quad \mathbf{G}(Z,t) = \mathbf{L}^{-1}(t)\mathbf{F}\big(\mathbf{L}(t)Z,t\big) - \mathbf{L}^{-1}(t)\dot{\mathbf{L}}(t)Z,$$

також є конусом. У цьому випадку зв'язок між розв'язками $X(t) = \mathbf{L}(t)Z(t)$ можна використати в ході вивчення їхніх властивостей щодо виділених конусів.

За допомогою конуса $\mathcal{K}_t^*$ при $t \geq 0$ визначимо такі умови:

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X-\Theta) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{F}(X,t)\big) \geq 0, \tag{7.6}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X-Y) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{F}(X,t)-\mathbf{F}(Y,t)\big) \leq 0. \tag{7.7}$$

Нехай $\mathcal{F}_0^\pm(\Theta)$ — класи оператор-функцій $\mathbf{F}$, що задовольняють умову (7.6) щодо $\pm\mathcal{K}_t$. Клас оператор-функцій $\mathbf{F}$, що має властивість (7.7), позначимо як $\mathcal{F}$. Визначимо також класи оператор-функцій $\mathcal{F}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{F}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{F}_1^-(\Theta)$ і $\mathcal{F}_2^-(\Theta)$, що мають властивість (7.7) відповідно при $Y \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$ і $Y \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$. Позначимо перетини $\mathcal{F}_k(\Theta) = \mathcal{F}_k^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_k^-(\Theta)$, $k = 0,1,2$. Очевидно, що

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1^\pm(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_2^\pm(\Theta), \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_2(\Theta).$$

Лема 7.2 *Нехай $\mathcal{K}_t$ — тілесний конус, що має властивість вкладення*

$$0 \leq \tau < t \implies \mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t. \tag{7.8}$$

Тоді: (i) *система* (7.5) *монотонна щодо $\mathcal{K}_t$, якщо $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$;* (ii) *система* (7.5) *належить класу $\mathcal{M}_0^\pm(\Theta)$, якщо $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^\pm(\Theta)$;* (iii) *система* (7.5) *належить класу $\mathcal{M}_0^\pm(\Theta) \cap \mathcal{M}_k^\pm(\Theta)$, якщо $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_k^\pm(\Theta)$, $k = 1,2$;* (iv) *система* (7.5) *належить класу $\mathcal{M}_k^\pm(\Theta)$, якщо $\mathbf{F}(\Theta,t) \in \pm\mathcal{K}_t$ і $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_k^\pm(\Theta)$, $k = 1,2$.*

Зазначимо, що у разі сталого конуса $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$ можна сформулювати зворотні твердження леми 7.2 [51].

Для того щоб $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$ і $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, достатньо виконання відповідних умов

$$\mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \alpha_+(X,t)\,(X-\Theta), \quad X-\Theta \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0;$$

$$\mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \alpha_-(X,t)\,(X-\Theta), \quad \Theta - X \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0.$$

Тут $\alpha_\pm(X,t)$ — скалярні функції. Аналогічно, якщо

$$\mathbf{F}(X,t) - \mathbf{F}(Y,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \beta(X,Y,t)\,(X-Y), \quad Y - X \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0,$$

де $\beta(X,Y,t)$ — скалярна функція, то $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$. Якщо остання умова виконується при $Y \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$ і $Y \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$, то відповідно $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1^+(\Theta)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2^+(\Theta)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1^-(\Theta)$ і $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2^-(\Theta)$.

Класи оператор-функцій $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0^\pm(\Theta)$ і $\mathcal{F}_2^\pm(\Theta)$ можна описати у термінах операторних нерівностей

$$\mathbf{F}'_\pm(X,t) \trianglerighteq \beta_\pm(X,t)\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{D}, \ \ t \geq 0, \tag{7.9}$$

де $\beta_\pm(X,t)$ — скалярні функції. Ці нерівності означають, що оператори $\mathbf{F}'_\pm(X,t)$ є позадіагонально додатними щодо $\mathcal{K}_t$ при $X \in \mathcal{D}$ і $t \geq 0$.

Лема 7.3 *Нехай оператор-функція* $\mathbf{F}(X,t)$ *диференційована за Гато щодо* $\pm\mathcal{K}_t$ *у* $\mathcal{K}_t$*-опуклій області* $\mathcal{D}$ *при* $t \geq 0$. *Тоді:*
(i) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$, *якщо виконується одна із нерівностей* (7.9)*;*
(ii) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^\pm(\Theta)$, *якщо* $\mathbf{F}(\Theta,t) \in \pm\mathcal{K}_t$ *і виконується відповідна нерівність* (7.9) *при* $X \in \mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$*;*
(iii) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2^\pm(\Theta)$, *якщо виконується відповідна нерівність* (7.9) *при* $X \in \mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$.

Твердження (i)—(iii) леми 7.3 встановлюються за допомогою співвідношення типу Лагранжа для оператор-функції $\mathbf{F}(X,t)$:

$$\varphi\big(\mathbf{F}(X+H,t) - \mathbf{F}(X,t)\big) = \varphi\big(\mathbf{F}'_\pm(Z,t)H\big), \quad H \in \pm\mathcal{K}_t, \ \ \varphi \in \pm\mathcal{K}_t^*,$$

де $Z = X + \mu H \in \mathrm{Co}\{X, X+H\}$, $0 < \mu < 1$. Якщо похідна Гато $\mathbf{F}'_\pm(Z,t)$ як оператор-функція неперервна, то

$$\mathbf{F}(X+H,t) - \mathbf{F}(X,t) = \int_0^1 \mathbf{F}'_\pm(X+\mu H,t)H\,d\mu, \quad H \in \pm\mathcal{K}_t.$$

Таким чином, введені класи диференціальних систем (7.5) за умов лем 7.2 і 7.3 можна описати в термінах позадіагонально додатних операторів.

Введемо класи оператор-функцій з метою застосування в теорії порівняння систем (підрозд. 7.5) і, зокрема, у задачах робастної стійкості станів позитивних систем (підрозд. 7.6). Запишемо $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}}$, якщо можна встановити таку відповідність між розв'язками системи (7.5) та диференціальної нерівності $\dot{Z} \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(Z,t)$, що $Z(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \implies Z(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t)$, $t > \tau \geq 0$. Якщо при цьому $X(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$ ($Z(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$), то $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ ($F \in \overline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$). Аналогічно визначаються класи оператор-функцій $\underline{\mathcal{F}}$, $\underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ і $\underline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$, використовуючи $-\mathcal{K}_t$ замість $\mathcal{K}_t$. Очевидно, що $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$ і $\underline{\mathcal{F}} \subseteq \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta) \subseteq \underline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$.

Якщо $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}} \cup \underline{\mathcal{F}}$, то система (7.5) є монотонною щодо $\mathcal{K}_t$. Якщо $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}}$ і $F(\Theta,t) \in \mathcal{K}_t$ ($\mathbf{F} \in \underline{\mathcal{F}}$ і $\mathbf{F}(\Theta,t) \in -\mathcal{K}_t$), то система (7.5) належить класу $\mathcal{M}_0^+(\Theta)$ ($\mathcal{M}_0^-(\Theta)$).

Лема 7.4 *Якщо виконуються умови леми* 7.2*, то:*
(i) $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}} \cap \underline{\mathcal{F}}$;
(ii) $\mathcal{F}_1^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^+(\Theta) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$, $\quad \mathcal{F}_1^-(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^-(\Theta) \subseteq \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$;
(iii) $\mathcal{F}_2^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^+(\Theta) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$, $\quad \mathcal{F}_2^-(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^-(\Theta) \subseteq \underline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$.

Різницеві системи. Розглянемо різницеву систему:

$$X_{t+1} = \mathbf{G}(X_t, t), \quad \tau \in \Upsilon,\ t \in \Upsilon_\tau, \tag{7.10}$$

де $\mathbf{G}$ — неперервна оператор-функція, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язку $X_t = \mathbf{E}(X_\tau, \tau, t)$, $t \in \Upsilon_\tau = \{\tau, \tau+1, \dots\}$, для будь-якого $\tau \in \Upsilon = \{0, 1, \dots\}$, $X_\tau \in \mathcal{D}$. Визначимо такі умови:

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta \implies \mathbf{G}(X,t) \overset{\mathcal{K}_{t+1}}{\geq} \Theta, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.11}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y \implies \mathbf{G}(X,t) \overset{\mathcal{K}_{t+1}}{\leq} \mathbf{G}(Y,t), \quad t \in \Upsilon. \tag{7.12}$$

Якщо конус $\mathcal{K}_t$ має властивість вкладення (7.8), то додатна та монотонна щодо $\mathcal{K}_t$ оператор-функція $\mathbf{G}$ задовольняє відповідно умови (7.11) при $\Theta = 0$ і (7.12).

Нехай $\mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$ — клас оператор-функцій $\mathbf{G}$, що задовольняють умову (7.11) щодо $\pm\mathcal{K}_t$. Нехай $\mathcal{G}$ — клас оператор-функцій $\mathbf{G}$, які задовольняють умову (7.12). Аналогічно визначаємо класи оператор-функцій $\mathcal{G}_1^{+}(\Theta)$, $\mathcal{G}_2^{+}(\Theta)$, $\mathcal{G}_1^{-}(\Theta)$ і $\mathcal{G}_2^{-}(\Theta)$, що мають властивість (7.12) відповідно при $Y \in \mathcal{K}_t^{+}(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^{+}(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^{-}(\Theta)$ і $Y \in \mathcal{K}_t^{-}(\Theta)$. Позначимо перетини $\mathcal{G}_k(\Theta) = \mathcal{G}_k^{+}(\Theta) \cap \mathcal{G}_k^{-}(\Theta)$, $k = \overline{0,2}$. Очевидно, що $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1^{\pm}(\Theta) \subseteq \mathcal{G}_2^{\pm}(\Theta)$ і $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1(\Theta) \subseteq \mathcal{G}_2(\Theta)$.

Лема 7.5 *Виконуються такі твердження:* (i) $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$ *є інваріантною множиною системи* (7.10) *тоді і лише тоді, коли* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$*;* (ii) *система* (7.10) *монотонна щодо* $\mathcal{K}_t$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$*;* (iii) *якщо система* (7.10) *належить* $\mathcal{M}_k^{\pm}(\Theta)$*, то* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_k^{\pm}(\Theta)$ $(k = 1, 2)$*, зворотне твердження виконується, якщо* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$ *або* $\mathbf{G}(\Theta, t) - \Theta \in \pm\mathcal{K}_{t+1}$*,* $t \in \Upsilon$*.*

Якщо система (7.10) має стан рівноваги $X_t \equiv \Theta$ або інваріантні множини $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$, то згідно з твердженням (iii) вона належить класу $\mathcal{M}_k(\Theta)$ тоді і лише тоді, коли $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_k^{+}(\Theta) \cap \mathcal{G}_k^{-}(\Theta)$, $k = 1, 2$.

Можна описати класи оператор-функцій $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$ і $\mathcal{G}_2^{\pm}(\Theta)$ за допомогою таких включень:

$$\mathbf{G}'_{\pm}(X, t)\mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_{t+1}, \quad X \in \mathcal{D}, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.13}$$

де $\mathbf{G}'_{\pm}(X, t)$ — похідні Гато $G(X, t)$ щодо $\pm\mathcal{K}_t$.

Лема 7.6 *Нехай оператор-функція* $\mathbf{G}(X, t)$ *диференційована за Гато щодо* $\pm\mathcal{K}_t$ *в* $\mathcal{K}_t$*-опуклій області* $\mathcal{D}$ *при* $t \in \Upsilon$*, тоді:*
(i) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$*, якщо виконується одне із включень* (7.13)*;*
(ii) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$*, якщо* $\mathbf{G}(\Theta, t) \in \pm\mathcal{K}_{t+1}$ *і відповідне включення* (7.13) *виконується при* $X \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$*;*
(iii) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_2^{\pm}(\Theta)$*, якщо відповідне включення* (7.13) *виконується при* $X \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$.

7.3 Позитивність та стійкість динамічних систем

Розглянемо неперервну або дискретну динамічну систему $\mathcal{S}$ зі станами (7.2) відповідно при $\Upsilon = [0, \infty)$ або $\Upsilon = \{0, 1, \dots\}$.

Означення 7.1 Стан $X_t \equiv \Theta$ динамічної системи $\mathcal{S}$ називають *стійким в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\tau \in \Upsilon$ існує таке $\delta > 0$, що $X_t \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t \in \Upsilon_\tau$ і $X_\tau \in \mathcal{S}_\delta(\tau)$, де $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta) : \|X - \Theta\| \leq \varepsilon\}$. Якщо при цьому для деякого $\delta > 0$ із $X_\tau \in \mathcal{S}_\delta(\tau)$ випливає $\|X_t - \Theta\| \to 0$ при $t \to \infty$, то стан $X_t \equiv \Theta$ *асимптотично стійкий в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$.

Це означення при $\Theta = 0$ дає поняття *стійкості* та *асимптотичної стійкості в конусі* $\mathcal{K}_t$ нульового стану системи.

Лема 7.7 *Нехай* $\mathcal{K}_t$ *— нормальний відтворювальний конус з обмеженою сталою нормальності* $\nu_t \leq \nu < \infty$. *Тоді стан* $X \equiv \Theta$ *системи* (7.2) *класу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим в тому і лише в тому випадку, коли він стійкий (асимптотично стійкий) в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ *і* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$.

Доведення. Для системи класу $\mathcal{M}_1(\Theta)$ обидві множини $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ і $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ є інваріантними. Тому зі стійкості (асимптотичної стійкості) за Ляпуновим стану $X \equiv \Theta$ випливає стійкість (асимптотична стійкість) в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ і $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$.

Нехай стан $X \equiv \Theta$ системи $\mathcal{S}$ стійкий в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ і $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$. Розглянемо її довільний стан X_t з початковим значенням X_τ. Оскільки конус $\mathcal{K}_\tau$ відтворювальний і несплющений, то для деяких $X_\tau^\pm \in \mathcal{K}_\tau^\pm(\Theta)$ виконуються співвідношення

$$X_\tau^- \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_\tau^+, \quad \|X_\tau^\pm - \Theta\| \leq \gamma_\tau \|X_\tau - \Theta\|,$$

де $\gamma_\tau > 0$ — стала несплющеності конуса $\mathcal{K}_\tau$. З означення класів $\mathcal{M}_1^\pm(\Theta)$ маємо нерівності $X_t^- \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_t \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_t^+$, $t \in \Upsilon_\tau$, де $X_t^\pm \in \mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$ — стани системи з відповідними початковими значеннями $X_\tau^\pm$.

Враховуючи стійкість стану $X_t \equiv \Theta$ системи в $\mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta_\pm > 0$ так, щоб із нерівності $\|X_\tau^\pm - \Theta\| \leq \delta_\pm$ випливало $\|X_t^\pm - \Theta\| \leq \varepsilon(2\nu + 1)^{-1}$ при $t \in \Upsilon_\tau$. Тоді, враховуючи нормальність конуса $\mathcal{K}_t$, одержуємо

$$\|X_t - \Theta\| \leq (\nu_t + 1)\|X_t^- - \Theta\| + \nu_t \|X_t^+ - \Theta\| \leq \varepsilon,$$

якщо $\|X_\tau\| \leq \delta = \gamma_\tau^{-1} \min\{\delta_+, \delta_-\}$. Тут $\nu_t > 0$ — стала нормальності конуса $\mathcal{K}_t$, причому $\nu_t \leq \nu < \infty$. При цьому $\|X_t - \Theta\| \to 0$, якщо

$\|X_t^{\pm} - \Theta\| \to 0$, $t \to \infty$, тобто стан $X_t \equiv \Theta$ системи $\mathcal{S}$ асимптотично стійкий за Ляпуновим. $\square$

Зауваження 7.1 Для класу лінійних систем $\mathcal{S}$ з інваріантним конусом $\mathcal{K}_t$, що задовольняє умови леми 7.7, властивості стійкості (асимптотичної стійкості) стану $X \equiv 0$ в $\mathcal{K}_t$ та стійкості (асимптотичної стійкості) даного стану за Ляпуновим еквівалентні.

Диференціальні системи. Розглянемо лінійну автономну систему:

$$\dot{X} = \mathbf{M}X, \quad t \geq 0, \tag{7.14}$$

де $\mathbf{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — лінійний обмежений оператор. Властивість позитивності системи (7.14) щодо конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ рівносильна включенню $e^{t\mathbf{M}}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ для будь-якого $t \geq 0$.

Необхідні та достатні умови існування тілесного інваріантного конуса $\mathcal{K}$ системи (7.14) у скінченновимірному випадку описуються в термінах спектра $\sigma(\mathbf{M})$ у вигляді [108, 148]

$$\alpha(\mathbf{M}) \triangleq \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{M})} \operatorname{Re} \lambda \in \sigma(\mathbf{M}),$$

$$\lambda \in \sigma(\mathbf{M}), \ \operatorname{Re} \lambda = \alpha(\mathbf{M}) \implies d(\lambda) \leq d(\alpha(\mathbf{M})),$$

де $d(\cdot)$ — кратність власного значення матриці як кореня її мінімального полінома.

Теорема 7.1 [50, 51]. *Позитивна відносно нормального відтворювального конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ система* (7.14) *експоненціально стійка тоді і лише тоді, коли оператор $-\mathbf{M}$ додатно оборотний, тобто $\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{M}\mathcal{K}$. Якщо $\mathcal{K} \subseteq (\gamma\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathcal{K}$ для будь-якого $\gamma \geq 0$, то система* (7.14) *є експоненціально стійкою та позитивною щодо конуса $\mathcal{K}$.*

З наступного твердження одержуємо достатні умови експоненціальної стійкості системи (7.14) у термінах двох додатно оборотних операторів.

Теорема 7.2 *Якщо для деякого* $\gamma_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{M}\mathcal{K} \cap (\gamma_0 \mathbf{I} - \mathbf{M})\mathcal{K}, \quad \gamma_0 > \frac{\rho^2(\mathbf{M}) - r^2(\mathbf{M})}{2r(\mathbf{M})}, \tag{7.15}$$

де $\rho(\mathbf{M}) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(\mathbf{M})} |\lambda|$, $r(\mathbf{M}) = \inf\limits_{\lambda \in \sigma(\mathbf{M})} |\lambda|$, *то система* (7.14) *експоненціально стійка.*

Доведення. Із (7.15) випливає, що оператори $-\mathbf{M}^{-1}$ і $(\gamma_0 \mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ мають інваріантний конус $\mathcal{K}$. Їхні спектри складаються з відповідних чисел $-1/\lambda$ і $1/(\gamma_0 - \lambda)$ при $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$. За теоремою про спектральний радіус додатного оператора маємо нерівності $|\lambda| \geq -\alpha$ і $|\gamma_0 - \lambda| \geq \gamma_0 - \beta$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$, де $\alpha, \beta \in \sigma(\mathbf{M})$ — деякі дійсні точки спектра. Якщо $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$, то $-\mathbf{M} \trianglelefteq \gamma \mathbf{I} - \mathbf{M} \trianglelefteq \gamma_0 \mathbf{I} - \mathbf{M}$ і кожен оператор $\gamma \mathbf{I} - \mathbf{M}$ має бути додатно оборотним (теорема про двосторонню оцінку додатно оборотного оператора [36]).

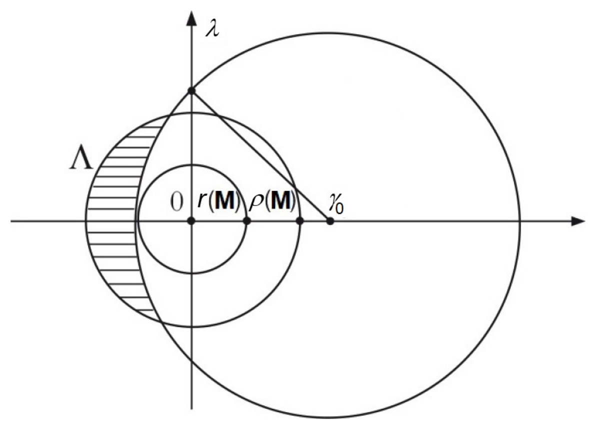


Рис. 7.1. Λ — область розміщення спектра $\sigma(\mathbf{M})$

Отже, в цьому випадку $\alpha = \beta = -r(\mathbf{M})$ і область розміщення спектра $\sigma(\mathbf{M})$ описується у вигляді

$$(\gamma_0 - x)^2 + y^2 \geq (\gamma_0 + r(\mathbf{M}))^2, \quad r^2(\mathbf{M}) \leq x^2 + y^2 \leq \rho^2(\mathbf{M}),$$

де $x = \mathrm{Re}\lambda$, $y = \mathrm{Im}\lambda$. Якщо γ_0 задовольняє нерівність у (7.15), то ця область Λ розміщена ліворуч від уявної осі (рис. 7.1), що еквівалентно експоненціальній стійкості системи (7.14). $\square$

Приклад 7.1 Розглянемо лінійну систему:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.16}$$

Критерієм позитивності даної системи щодо конуса невід'ємних векторів $\mathbb{R}^n_+$ є *позадіагональна невід'ємність* матриці A:

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{7.17}$$

За умов (7.17) еквівалентними є такі твердження [111]:
1) система (7.16) експоненціально стійка; 2) всі елементи матриці A^{-1} недодатні; 3) всі послідовні головні мінори матриці $-A$ додатні (умова Севастьянова—Котелянського [21]); 4) існує вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, для якого $-Ax \in \mathbb{R}^n_+$; 5) існує діагональна матриця $X > 0$, для якої $AX + XA^\top < 0$.

За теоремою 7.2 достатніми умовами експоненціальної стійкості системи (7.16) є недодатність усіх елементів матриць A^{-1} і $(\gamma_0 I_n - A)^{-1}$ за досить великого $\gamma_0 > 0$. Нижню оцінку для γ_0 подано в (7.15).

Наведемо умови експоненціальної стійкості системи (7.16) з використанням еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q)$, де $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невироджена симетрична матриця, що має лише одне додатне власне значення (див. підрозд. 8.8). Критерієм позитивності системи (7.16) щодо конуса $\mathcal{K}(Q)$ є матрична нерівність

$$A^\top Q + QA + \alpha Q \geq 0 \tag{7.18}$$

для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Матриця $-A^{-1}$ зберігає конус $\mathcal{K}(Q)$ тоді і лише тоді, коли для деякого $\beta > 0$

$$A^\top QA \leq \beta Q, \quad h^\top A^{-1} h \leq 0, \quad h^\top (A^\top QA)^{-1} h \geq 0, \tag{7.19}$$

де h — власний вектор матриці Q, що відповідає її додатному власному значенню [7]. Тому за теоремою 7.1 система (7.16) є експоненціально стійкою та позитивною щодо конуса $\mathcal{K}(Q)$, якщо сумісною є система нерівностей (7.18) і (7.19).

Розглянемо нелінійну автономну систему:

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X), \quad \mathbf{F}(\Theta) = 0, \quad t \geq 0, \tag{7.20}$$

де $X \equiv \Theta \in \mathcal{X}$ — ізольований стан рівноваги.

Теорема 7.3 *Нехай* $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ *— нормальний відтворювальний конус. Стан* $X \equiv \Theta$ *системи* (7.20) *асимптотично стійкий за Ляпуновим, якщо виконується одна із умов:*

(a) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta) \cup \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, *існує похідна Фреше* $\mathbf{F}'(\Theta)$ *і оператор* $-\mathbf{F}'(\Theta)$ *додатно оборотний:*

$$\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{F}'(\Theta)\mathcal{K}; \tag{7.21}$$

(b) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1(\Theta)$, *існують похідні Фреше* $\mathbf{F}'_\pm(\Theta)$ *щодо* $\pm\mathcal{K}$ *і оператори* $-\mathbf{F}'_\pm(\Theta)$ *додатно оборотні:*

$$\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{F}'_+(\Theta)\mathcal{K} \cap \mathbf{F}'_-(\Theta)\mathcal{K}. \tag{7.22}$$

Доведення. (a) Систему (7.20) при $X = \Theta + H$ можна подати у вигляді

$$\dot{H} = \mathbf{F}'(\Theta)H + \mathbf{R}(\Theta, H), \quad \mathbf{R}(\Theta, H) = o(\|H\|), \quad H \in \mathcal{X}.$$

Для того, щоб скористатися теоремою Ляпунова про стійкість за першим наближенням, встановимо асимптотичну стійкість лінійної системи

$$\dot{H} = \mathbf{F}'(\Theta)H. \tag{7.23}$$

Система (7.23) є позитивною щодо $\mathcal{K}$ і $-\mathcal{K}$. Дійсно, враховуючи співвідношення

$$\mathbf{F}(\Theta + \varepsilon H) = \varepsilon\mathbf{F}'(\Theta)H + \mathbf{R}(\Theta, \varepsilon H), \quad \frac{\mathbf{R}(\Theta, \varepsilon H)}{\varepsilon\|H\|} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

і припущення $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta) \cup \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, маємо

$$H \in \pm\mathcal{K},\, \varphi \in \pm\mathcal{K}^*,\, \varphi(H) = 0 \implies \frac{\varphi\big(\mathbf{F}'(\Theta)H\big)}{\|H\|} + \frac{\varphi\big(\mathbf{R}(\Theta, \varepsilon H)\big)}{\varepsilon\|H\|} \geq 0.$$

Звідси випливає, що $\varphi\big(\mathbf{F}'(\Theta)H\big) \geq 0$, тобто виконуються умови позитивності системи (7.23) (див. твердження (ii) леми 7.2 у випадку $\Theta = 0$). За теоремою 7.1 лінійна система (7.23) за умови (7.21) експоненціально стійка. При цьому стан $X \equiv \Theta$ вихідної системи (7.20) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

(b) Якщо $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1(\Theta)$, то згідно з твердженням (iv) леми 7.2 система (7.20) належить класу $\mathcal{M}_1(\Theta)$ і має інваріантні множини $\mathcal{K}^{\pm}(\Theta)$. За лемою 7.7 асимптотична стійкість у $\mathcal{K}^{\pm}(\Theta)$ стану $X \equiv \Theta$ системи (7.20) забезпечує його асимптотичну стійкість за Ляпуновим.

Систему (7.20) при $X = \Theta + H \in \mathcal{K}^{\pm}(\Theta)$ можна подати у вигляді

$$\dot{H} = \mathbf{F}'_{\pm}(\Theta)H + \mathbf{R}_{\pm}(\Theta, H), \quad \mathbf{R}_{\pm}(\Theta, H) = o(\|H\|), \quad H \in \pm\mathcal{K}.$$

Тому із асимптотичної стійкості в конусах $\mathcal{K}$ і $-\mathcal{K}$ стану $H \equiv 0$ цих систем випливає асимптотична стійкість за Ляпуновим стану $X \equiv \Theta$ вихідної системи (7.20). Оскільки лінійні системи $\dot{H} = \mathbf{F}'_{\pm}(\Theta)H$ позитивні щодо $\mathcal{K}$ і $-\mathcal{K}$ і експоненціально стійкі за умови (7.22) (див. доведення у випадку (a)), то стан $X \equiv \Theta$ системи (7.20) є асимптотично стійким за Ляпуновим. □

Зазначимо, що властивість тілесності конуса $\mathcal{K}$ дає змогу в теоремі 7.3 замість умови (7.21) використовувати систему конусних нерівностей

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{F}'(\Theta)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0.$$

Сумісність цієї системи щодо H рівносильна додатній оборотності оператора $-\mathbf{F}'(\Theta)$. Аналогічно, умова (7.22) еквівалентна сумісності системи співвідношень

$$H_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} H_+, \quad \mathbf{F}'_+(\Theta)H_+ \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} \mathbf{F}'_-(\Theta)H_-.$$

Гіпотеза 7.1 *Нехай система* (7.20) *належить класу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *щодо нормального тілесного конуса* $\mathcal{K}$ *і виконуються конусні нерівності*

$$X_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_+, \quad \mathbf{F}(X_+) \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} \mathbf{F}(X_-).$$

Тоді стан $X \equiv \Theta$ *цієї системи асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

Приклад 7.2 Розглянемо нелінійну систему:

$$\dot{x} = Ax + b \odot \sin|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.24}$$

де $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\odot$ і $|\cdot|$ — поелементні операції відповідно добутку та модуля. Нехай A — позадіагонально невід'ємна матриця (умови (7.17)). Тоді (7.24) є системою класу $\mathcal{M}$ щодо конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$.

Обчислимо похідні Фреше за конусами $\pm\mathcal{K}$ вектор-функції $f(x) = Ax + b \odot \sin|x|$ у точці $\theta = 0$:

$$f'_+(0) = A + \operatorname{diag}\{b\}, \quad f'_-(0) = A - \operatorname{diag}\{b\}.$$

Тут $\operatorname{diag}\{b\}$ означає діагональну матрицю, утворену з елементів вектора b. За теоремою 7.3 розв'язок $x \equiv 0$ системи (7.24) асимптотично стійкий, якщо всі елементи матриць $-\big(f'_\pm(0)\big)^{-1}$ невід'ємні. Ця умова у разі $n = 2$ має вигляд

$$a_{11} + |b_1| < 0,\ a_{22} + |b_2| < 0,\ |b_1 a_{22} + b_2 a_{11}| < a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_1 b_2.$$

У загальному випадку для додатної оборотності матриць $-\big(f'_\pm(0)\big)^{-1}$ достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{ii} + |b_i| + \rho(M) < 0, \quad i = \overline{1,n},$$

де $\rho(M)$ — спектральний радіус невід'ємної матриці $M = A - A \odot I$. Це твердження є наслідком теореми про двосторонню оцінку додатно оборотного оператора та факту, що $(\gamma I - M)^{-1} \geq 0 \iff \gamma > \rho(M)$ [36].

Приклад 7.3 Розглянемо систему:

$$\dot{x} = (Ax + b) \odot c(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{7.25}$$

де $c(x) = [c_1(x_1), \ldots, c_n(x_n)]^\top$ — неперервна вектор-функція з невід'ємними компонентами, диференційована в околі ізольованого стану рівноваги $\theta = -A^{-1}b$. В околі точки $x = \theta$ маємо

$$f'(x) = \operatorname{diag}\{c(x)\}\, A + \operatorname{diag}\{Ax + b\}\, c'(x), \quad f'(\theta) = \operatorname{diag}\{c(\theta)\}\, A,$$

де $f(x) = (Ax + b) \odot c(x)$. Можна показати, що система (7.25) за умов (7.17) є монотонною щодо конуса $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$. При цьому за теоремою 7.3 стан $x \equiv \theta$ цієї системи асимптотично стійкий, якщо $c(\theta) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$ і всі елементи матриці A^{-1} недодатні.

Розглянемо нелінійну диференціальну систему:

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X)X, \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{7.26}$$

де $\mathbf{A}$ — неперервна оператор-функція, значення $\mathbf{A}(X)$ якої є лінійними обмеженими операторами в $\mathcal{X}$. Похідні Гато та похідні Гато за конусами $\pm\mathcal{K}$ оператор-функції $\mathbf{F}(X) = \mathbf{A}(X)X$ мають вигляд

$$\mathbf{F}'(X) = \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X), \quad \mathbf{B}(X)H = \big[\mathbf{A}'(X)H\big]X,$$

$$\mathbf{F}'_{\pm}(X) = \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}_{\pm}(X), \quad \mathbf{B}_{\pm}(X)H = \big[\mathbf{A}'_{\pm}(X)H\big]X.$$

Тут $\mathbf{A}'(X)$ и $\mathbf{A}'_{\pm}(X)$ — похідні Гато $\mathbf{A}(X)$, а значення $\mathbf{B}(X)$ і $\mathbf{B}_{\pm}(X)$ є лінійними операторами в $\mathcal{X}$. Оскільки $\mathbf{F}'(0) = \mathbf{F}'_{\pm}(0) = \mathbf{A}(0)$, то, враховуючи лему 7.3, маємо наслідок теореми 7.3.

Наслідок 7.1 *Нехай виконується одна із умов типу позадіагональної додатності:*

$$\mathbf{A}(X) \trianglerighteq \alpha_{\pm}(X)\mathbf{I}, \quad X \in \pm\partial\mathcal{K},$$

$$\mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X) \trianglerighteq \beta(X)\mathbf{I}, \quad X \in \pm\mathcal{K},$$

$$\mathbf{A}(X) + \mathbf{B}_{\pm}(X) \trianglerighteq \beta_{\pm}(X)\mathbf{I}, \quad X \in \pm\mathcal{K},$$

де $\mathcal{K}$ — тілесний конус, $\alpha_{\pm}(X)$, $\beta(X)$ і $\beta_{\pm}(X)$ — скалярні функції. Тоді стан $X \equiv 0$ системи (7.26) асимптотично стійкий, якщо сумісна система конусних нерівностей

$$\mathbf{A}(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0. \tag{7.27}$$

За умов наслідку 7.1 система (7.26) є позитивною щодо $\pm\mathcal{K}$.

Приклад 7.4 Розглянемо диференціальну систему:

$$\dot{x} = A(x)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{7.28}$$

де $A(x) = \mathrm{diag}\{d - Cx\}$, $d \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджена матриця. Ця система є моделлю типу Колмогорова динаміки зростання та взаємодії n популяцій. У неї два стани рівноваги: $\theta_0 = 0$ і $\theta_1 = C^{-1}d$.

Система (7.28) позитивна щодо конуса $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$, і в наслідку 7.1 умови асимптотичної стійкості (7.27) стану $x \equiv \theta_0$ зводяться до нерівності $d \overset{\mathcal{K}}{<} 0$. Похідна Фреше вектор-функції $f(x) = A(x)x$ має вигляд $f'(x) = A(x) + B(x)$, де $B(x) = -\mathrm{diag}\{x\}\, C$. При цьому $f'(\theta_1) = -C_1$, де $C_1 = \mathrm{diag}\{\theta_1\}\, C$. Матриця $f'(x)$ є позадіагонально невід'ємною при $x - \theta_1 \in \mathcal{K}$, якщо $\theta_1 \in \mathcal{K}$ і матриця C позадіагонально недодатна. При цьому $f \in \mathcal{F}_0^+(\theta_1)$ і система (7.28) належить класу $\mathcal{M}_0^+(\theta_1)$ (див. твердження (ii) лем 7.2 і 7.3). Якщо, крім того, матриця C_1 додатно оборотна, то за теоремою 7.3 стан $x \equiv \theta_1$ цієї системи асимптотично стійкий. У наведених умовах асимптотичної стійкості стану $x \equiv \theta_1$ системи (7.28) C_1 є M-*матрицею*, тобто $C_1^{-1} \trianglerighteq 0$ і C_1 — позадіагонально недодатна.

Різницеві системи. Розглянемо різницеву систему:

$$X_{t+1} = \mathbf{M}X_t, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.29}$$

де $\mathbf{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — лінійний обмежений оператор. Властивість позитивності системи (7.29) щодо конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ рівносильна додатності оператора $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$). Існування інваріантного тілесного конуса $\mathcal{K}$ системи (7.29) у скінченновимірному просторі $\mathcal{X}$ рівносильне умовам [108, 148]

$$\rho(\mathbf{M}) \triangleq \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{M})} |\lambda| \in \sigma(\mathbf{M}),$$

$$\lambda \in \sigma(\mathbf{M}), \ |\lambda| = \rho(\mathbf{M}) \implies d(\lambda) \leq d(\rho(\mathbf{M})).$$

Тут $d(\cdot)$ — кратність власного значення матриці як кореня її мінімального полінома. Зокрема, за додаткових обмежень на точки спектра $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$, для яких $|\lambda| = \rho(\mathbf{M})$, дана система має інваріантний еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}$ [145]. Умови стійкості лінійних позитивних систем (7.29) описуються в термінах додатно оборотних операторів і додатних розв'язків алгебричних рівнянь (див., наприклад, [35]).

Теорема 7.4 *Нехай система* (7.29) *позитивна щодо нормального відтворювального конуса* $\mathcal{K}$. *Тоді еквівалентними є такі твердження:* 1) *система* (7.29) *асимптотично стійка;*
2) $\rho(\mathbf{M}) < 1$; 3) $\mathcal{K} \subseteq (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathcal{K}$.

Приклад 7.5 Розглянемо лінійну систему:

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \Upsilon. \tag{7.30}$$

Позитивність цієї системи щодо конуса невід'ємних векторів $\mathbb{R}^n_+$ еквівалентна невід'ємності усіх елементів матриці A. Критерієм асимптотичної стійкості системи (7.14), позитивної щодо $\mathbb{R}^n_+$, є невід'ємність всіх елементів оберненої матриці $(I_n - A)^{-1}$.

Система (7.30) має інваріантний еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}(Q)$ тоді і лише тоді, коли для деякого $\alpha \geq 0$ виконується система матричних нерівностей [7]:

$$A^\top QA \geq \alpha Q, \quad h^\top Ah \geq 0, \quad h^\top AQ^{-1}A^\top h \geq 0. \tag{7.31}$$

Якщо разом з (7.31) виконуються матричні нерівності

$$B^\top QB \leq \beta Q, \quad h^\top B^{-1}h \geq 0, \quad h^\top (B^\top QB)^{-1}h \geq 0, \tag{7.32}$$

де $B = I_n - A$ і $\beta > 0$, то система (7.30) асимптотично стійка.

Можна отримати низку інших критеріїв асимптотичної стійкості системи (7.30), використовуючи умови інваріантності конусів типу $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$, отримані в [5] (див. підрозд. 8.8).

Сформулюємо умови асимптотичної стійкості ізольованого стану рівноваги $X_t \equiv \Theta$ нелінійної різницевої системи

$$X_{t+1} = \mathbf{G}(X_t), \quad \mathbf{G}(\Theta) = \Theta, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.33}$$

у фазовому просторі якої виділено конус $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$.

Теорема 7.5 *Нехай $\mathcal{K}$ — нормальний відтворювальний конус. Стан $X \equiv \Theta$ системи* (7.33) *асимптотично стійкий за Ляпуновим, якщо виконується одна із умов:*

(a) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^+(\Theta) \cup \mathcal{G}_0^-(\Theta)$*, існує похідна Фреше* $\mathbf{G}'(\Theta)$ *і оператор* $\mathbf{I} - \mathbf{G}'(\Theta)$ *додатно оборотний:*

$$\mathcal{K} \subseteq \big[\mathbf{I} - \mathbf{G}'(\Theta)\big]\mathcal{K}. \tag{7.34}$$

(b) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_1(\Theta)$*, існують похідні Фреше* $\mathbf{G}'_\pm(\Theta)$ *щодо* $\pm\mathcal{K}$ *і оператори* $\mathbf{I} - \mathbf{G}'_\pm(\Theta)$ *додатно оборотні:*

$$\mathcal{K} \subseteq \big[\mathbf{I} - \mathbf{G}'_+(\Theta)\big]\mathcal{K} \cap \big[\mathbf{I} - \mathbf{G}'_-(\Theta)\big]\mathcal{K}. \tag{7.35}$$

Зазначимо, що для тілесного конуса $\mathcal{K}$ умови (7.34) і (7.35) еквівалентні сумісності відповідних систем конусних нерівностей

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{G}'(\Theta)H \overset{\mathcal{K}}{<} H,$$

$$H_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} H_+, \quad H_- - \mathbf{G}'_-(\Theta)H_- \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} H_+ - \mathbf{G}'_+(\Theta)H_+.$$

Гіпотеза 7.2 *Нехай система* (7.33) *належить класу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *щодо нормального тілесного конуса* $\mathcal{K}$ *і сумісна система конусних нерівностей*

$$X_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_+, \quad X_- - \mathbf{G}(X_-) \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} X_+ - \mathbf{G}(X_+).$$

Тоді стан $X_t \equiv \Theta$ *системи* (7.33) *асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

Розглянемо нелінійну різницеву систему:

$$X_{t+1} = \mathbf{A}(X_t)X_t, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.36}$$

де $\mathbf{A}$ — неперервна оператор-функція, значення $\mathbf{A}(X)$ якої є лінійними обмеженими операторами в $\mathcal{X}$. Враховуючи лему 7.6, маємо наслідок теореми 7.5.

Наслідок 7.2 *Нехай виконується одна із операторних нерівностей*

$$\mathbf{A}(X) \trianglerighteq 0, \quad \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X) \trianglerighteq 0, \quad \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}_\pm(X) \trianglerighteq 0,$$

де $\mathbf{B}(X)H = \big[\mathbf{A}'(X)H\big]X$, $\mathbf{B}_\pm(X)H = \big[\mathbf{A}'_\pm(X)H\big]X$, $X \in \pm\mathcal{K}$, $\mathcal{K}-$ *нормальний тілесний конус. Тоді стан* $X \equiv 0$ *системи* (7.36) *асимптотично стійкий за Ляпуновим, якщо сумісна система конусних нерівностей*

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{A}(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} H. \tag{7.37}$$

Приклад 7.6 Розглянемо нелінійну різницеву систему:

$$x_{t+1} = Ax_t + b(x_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.38}$$

де $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, b — неперервна векторна функція з компонентами $b_k(c_k^\top x)$, $k = 1, \dots, n$. Нехай елементи матриць A і $C^\top = [c_1, \dots, c_n]$ невід'ємні, а функції b_k — неспадні і мають ліві та праві похідні $b'_{k\pm}(z)$ у точці $z = 0$. Тоді (7.38) є системою класу $\mathcal{M}$ щодо конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$.

Обчислимо похідні Фреше за конусами $\pm\mathcal{K}$ векторної функції $f(x) = Ax + b(x)$ у точці $\theta = 0$:

$$f'_\pm(0) = A + B_\pm C, \quad B_\pm = \mathrm{diag}\{b'_{1\pm}(0), \dots, b'_{n\pm}(0).$$

За теоремою 7.5 розв'язок $x_t \equiv 0$ системи (7.38) асимптотично стійкий, якщо всі елементи матриць $(I - f'_\pm(0))^{-1}$ невід'ємні. Зокрема, поклавши

$$n = 2, \quad C = I_2, \quad b(z) = v(z)\, d, \quad v(z) = \begin{cases} z\, a^z, & z \geq 0, \\ \dfrac{z^3}{1+z^2} & z < 0, \end{cases}$$

де $d \in \mathcal{K}$, $a \geq 1$, маємо $B_+ = \ln a\, \mathrm{diag}\{d\}$, $B_- = 0$. У цьому випадку умови асимптотичної стійкості розв'язку $x_t \equiv 0$ системи (7.38) мають вигляд

$$(I_2 - A - B_+)^{-1} \trianglerighteq 0, \quad (I_2 - A)^{-1} \trianglerighteq 0,$$

де друга нерівність є наслідком першої, яка зводиться до системи скалярних нерівностей:

$$a_{11} + d_1 \ln a \geq 1, \quad a_{22} + d_2 \ln a \geq 1,$$

$$a_{11} + a_{22} - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + (d_1 + d_2 - a_{11}d_2 - a_{22}d_1)\ln a - d_1 d_2 \ln^2 a \geq 1.$$

Ця система нерівностей виконується, наприклад, за таких значень параметрів:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad a = 3.$$

Системи із запізненням. Розглянемо клас нелінійних диференціальних *систем із запізненням*:

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}(t)X(t) = \mathbf{G}\big(X(t-s), t\big), \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{7.39}$$

де $s > 0$ — стале запізнення, $\mathbf{L}(t) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — лінійний обмежений оператор у банаховому просторі $\mathcal{E}$, $\mathbf{G}(X, t)$ — неперервна оператор-функція, що задовольняє тотожність $\mathbf{G}(0, t) \equiv 0$ та умови існування єдиного розв'язку $X(t) \in \mathcal{X}$ за початкових умов

$$X(\xi) = \Psi(\xi), \quad \tau - s \leq \xi \leq \tau. \tag{7.40}$$

За умов $\mathbf{G}(0, t) \equiv 0$ і $\Psi(\xi) \equiv 0$ система (7.39) має тривіальний розв'язок $X \equiv 0$.

Стан $X \equiv 0$ системи (7.39) *стійкий за Ляпуновим*, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\tau \geq 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, що із $\|X(\tau)\|_s < \delta$ випливає $\|X(t)\| < \varepsilon$ за всіх $t > \tau$, де $\|X(\tau)\|_s = \max\limits_{\tau - s \leq \xi \leq \tau} \|X(\xi)\|$. Стан $X \equiv 0$ системи (7.39) називають *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і для будь-якого $\tau \geq 0$ існує $\delta = \delta(\tau) > 0$ таке, що для кожного розв'язку $X(t)$ із $\|X(\tau)\|_s < \delta$ випливає $\lim\limits_{t \to \infty} \|X(t)\| = 0$. Стан $X \equiv 0$ є *абсолютно стійким*, якщо він асимптотично стійкий за будь-якого $s \geq 0$.

Систему (7.39) називають *позитивною* щодо конуса $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}$, якщо для будь-якого $\tau \geq 0$ із $\Psi(\xi) \overset{\mathcal{K}_\xi}{\geq} 0$ за всіх $\xi \in [\tau - s, \tau]$ випливає $X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ при $t > \tau$.

Стан $X \equiv 0$ системи (7.39) називають *стійким у конусі* $\mathcal{K}_t$, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\tau \geq 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, що із $\Psi(\xi) \in \mathcal{S}_\delta(\xi)$ за всіх $\xi \in [\tau - s, \tau]$ випливає $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t \geq \tau$, де $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t : \|X\| \leq \varepsilon\}$. Якщо при цьому $\|X(t)\| \to 0$ для деякого $\delta > 0$, то стан $X \equiv 0$ системи (7.39) *асимптотично стійкий у конусі* $\mathcal{K}_t$.

Якщо система (7.39) позитивна щодо конуса $\mathcal{K}_t$, то зі стійкості (асимптотичної стійкості) за Ляпуновим стану $X \equiv 0$ випливає його стійкість (асимптотична стійкість) у $\mathcal{K}_t$.

Лема 7.8 *Система* (7.39) *позитивна щодо сталого конуса* $\mathcal{K}$ *тоді і лише тоді, коли для будь-яких* $\tau \geq 0$ *і* $t \geq \tau$ *виконуються включення*

$$\mathbf{W}(t,\tau)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad \mathbf{G}(\mathcal{K},t) \subseteq \mathcal{K}, \tag{7.41}$$

де $\mathbf{W}(t,\tau)$ *— еволюційний оператор лінійної системи*

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}(t)X(t) = 0, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{7.42}$$

Доведення. Розв'язок системи (7.39) за умов (7.40) на кожному інтервалі $[t_k, t_{k+1}]$ задовольняє інтегральні співвідношення

$$X(t) = \mathbf{W}(t,t_k)X(t_k) + \int_{t_k}^{t} \mathbf{W}(t,\xi)\mathbf{G}\big(X(\xi - s),\xi\big)d\xi, \tag{7.43}$$

де $t_k = \tau + k\,s$, $k = 0,1,\ldots$ Ці співвідношення можна безпосередньо встановити диференціюванням, використовуючи означення еволюційного оператора як розв'язок задачі Коші:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}(t,\xi) + \mathbf{L}(t)\mathbf{W}(t,\xi) = 0, \quad \mathbf{W}(\xi,\xi) = \mathbf{I}, \quad t \geq \xi, \tag{7.44}$$

де $\mathbf{I}$ —тотожний оператор. Отже, якщо в (7.40) $\Psi(\xi) \in \mathcal{K}$, то $X(t) \in \mathcal{K}$ при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$

Покажемо, що включення (7.41) необхідні для позитивності системи (7.39). Якщо

$$X(\xi) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \leq \xi \leq t_k - \varepsilon, \\ \Psi(\xi), & t_k - \varepsilon \leq \xi \leq t_k, \end{cases}$$

де $\varepsilon > 0$, $\Psi(\xi) \in \mathcal{K}$, то згідно з (7.43)

$$X(t) = \mathbf{W}(t,t_k)X(t_k) \in \mathcal{K}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} - \varepsilon.$$

Враховуючи замкненість конуса $\mathcal{K}$ при $\varepsilon \to 0$, одержуємо перше включення (7.41) на інтервалі $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Його виконання за будь-якого $t \geq \tau$ є наслідком мультиплікативного подання еволюційного оператора [26]:

$$\mathbf{W}(t,t_0) = \mathbf{W}(t,t_k)\mathbf{W}(t_k,t_{k-1})\cdots\mathbf{W}(t_1,t_0), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

Якщо $X(\tau) = 0$, то для деякого $\xi \in (\tau, t)$ маємо

$$X(t) = (t - \tau)\mathbf{W}(t, \xi)\mathbf{G}(X(\xi - s), \xi), \quad t > s,$$

$$X(\xi - s) \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t, \xi)\mathbf{G}(X(\xi - s), \xi) \in \mathcal{K}.$$

При цьому, якщо $t \to \tau$, то $\xi \to \tau$ і $\mathbf{W}(t, \xi) \to \mathbf{I}$. З огляду на замкненість конуса та неперервну залежність $\mathbf{W}$ і $\mathbf{G}$ від своїх аргументів $\mathbf{G}(X, \tau) \in \mathcal{K}$, якщо $X = X(\tau - s) \in \mathcal{K}$. Тому друге включення (7.41) також необхідне для позитивності системи (7.39). $\square$

Лемма 7.8 є узагальненням відомого критерію позитивності класу систем (7.39) щодо конуса невід'ємних векторів $\mathbb{R}^n_+$ [115].

Розглянемо підклас автономних систем із запізненням:

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}X(t) = \mathbf{G}\big(X(t - s)\big), \quad \mathbf{G}(0) = 0, \quad t \geq \tau \geq 0, \qquad (7.45)$$

Лема 7.9 *Нехай виконуються умови*

$$e^{-\mathbf{L}\,t}X \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} \mathbf{G}(X) \overset{\mathcal{K}}{\leq} \mathbf{P}X, \quad X \in \mathcal{K},\ t \geq 0, \qquad (7.46)$$

де $\mathbf{P}$ *— лінійний додатний оператор, та існують лінійні рівномірно додатні функціонали* $\varphi, \psi \in \mathcal{K}^*$ *у рівнянні*

$$\mathbf{M}^*\varphi = \psi, \quad \mathbf{M} \triangleq \mathbf{L} - \mathbf{P}. \qquad (7.47)$$

Тоді стан $X \equiv 0$ *системи* (7.45) *абсолютно стійкий у конусі* $\mathcal{K}$*.*

Доведення. Згідно з лемою 7.8 система (7.45) за умов (7.46) є позитивною. Побудуємо *функціонал Ляпунова—Красовського*:

$$V(X_t) = \varphi(X(t)) + \int_{-s}^{0} \varphi\left(\mathbf{G}\big(X(t + \xi)\big)\right) d\xi. \qquad (7.48)$$

Тут $X_t(\xi) = X(t+\xi)$, $\varphi \in \mathcal{K}^*$. Вираз (7.48) є узагальненням функціонала, використаного в праці [115] у випадку конуса $\mathbb{R}^n_+$.

Нехай $X(t)$ — розв'язок системи (7.45) з початковою функцією (7.40). Для будь-якого рівномірно додатного функціонала $\varphi \in \mathcal{K}^*$ виконується оцінка $\gamma_-\|X\| \leq \varphi(X) \leq \gamma_+\|X\|$, $X \in \mathcal{K}$, де $\gamma_\pm > 0$– деякі сталі, що не залежать від X [36]. Тому справджується нерівність $V(X_\tau) \geq \varphi\big(\Psi(\tau)\big) \geq \gamma_-\|\Psi(\tau)\|$.

Похідна функціонала (7.48) на розв'язках системи (7.45) за умов (7.46) і (7.47) задовольняє співвідношення

$$\dot{V}(X_t) = \varphi\left(-\mathbf{L}X(t) + \mathbf{G}\big(X(t)\big)\right) \le$$
$$\le -\varphi\big(\mathbf{M}X(t)\big) = -\mathbf{M}^*\varphi\big(X(t)\big) = -\psi\big(X(t)\big) \le -\gamma\|X(t)\|,$$

де $\gamma > 0$. Отже, стан $X \equiv 0$ позитивної системи (7.45) асимптотично стійкий в $\mathcal{K}$ за будь-якого запізнення $s \ge 0$ [116]. □

Теорема 7.6 *Нехай оператори системи* (7.45) *задовольняють умови* (7.46) *для конуса $\mathcal{K}$, що допускає оштукатурення, причому оператор $\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{P}$ додатно оборотний, а його обернений $\mathbf{M}^{-1}$ рівномірно додотний щодо $\mathcal{K}$. Тоді стан $X \equiv 0$ системи* (7.45) *абсолютно стійкий в конусі $\mathcal{K}$.*

Доведення. Конус $\mathcal{K}$ допускає оштукатурення тоді і лише тоді, коли в $\mathcal{K}^*$ існує рівномірно додатний функціонал [36, теорема 1.5]. Нехай $\psi \in \mathcal{K}^*$ — один із таких функціоналів. Оскільки оператор $\mathbf{M}$ додатно оборотний, то, враховуючи рівність $(\mathbf{M}^{-1})^* = (\mathbf{M}^*)^{-1}$, можна визначити функціонал $\varphi = (\mathbf{M}^*)^{-1}\psi \in \mathcal{K}^*$, що задовольняє (7.47). При цьому, враховуючи рівномірну додатність функціонала ψ та оператора $\mathbf{M}^{-1}$ для будь-якого $X \in \mathcal{K}$, маємо

$$\|\varphi(X)\| = \|(\mathbf{M}^*)^{-1}\psi(X)\| = \|\psi(\mathbf{M}^{-1}X)\| \ge \gamma_1\|\mathbf{M}^{-1}X\| \ge \gamma_2\|X\|,$$

де $\gamma_1 > 0$ і $\gamma_2 > 0$ — сталі, що не залежать від X. Це означає, що φ також є рівномірно додатним функціоналом. За лемою 7.9 стан $X \equiv 0$ системи (7.45) абсолютно стійкий в $\mathcal{K}$. □

Зауваження 7.2 Якщо в умовах теореми 7.6 оператор $\mathbf{L}$ додатно оборотний, то $\mathbf{M}$ належить класу операторів (7.1). При цьому в твердженні теореми 7.6 вимогу додатної оборотності оператора $\mathbf{M}$ можна замінити еквівалентними спектральними умовами $\rho(\mathbf{T}) < 1$, де $\rho(\mathbf{T})$ — спектральний радіус в'язки операторів $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{P} - \lambda\mathbf{L}$, або $\operatorname{Re}\lambda \le \alpha < 0 \ \ \forall\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$. Ці умови в разі тілесного конуса $\mathcal{K}$ рівносильні сумісності системи конусних нерівностей $\mathbf{M}X \overset{\mathcal{K}}{>} 0$ і $X \overset{\mathcal{K}}{>} 0$.

Розглянемо лінійну автономну систему:

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}X(t) = \mathbf{P}X(t-s), \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{7.49}$$

За лемою 7.8 система (7.49) має інваріантний конус $\mathcal{K}$ тоді і лише тоді, коли оператори $e^{-\mathbf{L}\,t}$ і $\mathbf{P}$ додатні:

$$e^{-\mathbf{L}\,t}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad \mathbf{P}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad t \geq 0. \tag{7.50}$$

Нехай $\mathcal{K}$ — нормальний відтворювальний конус. Тоді із

$$X(t) = e^{-\mathbf{L}(t-\tau)}X(\tau) + \int_\tau^t e^{-\mathbf{L}(t-\xi)}\mathbf{P}X(\xi - s)d\xi$$

випливає таке подання розв'язку позитивної системи (7.49): $X(t) = \mathbf{S}_t X_\tau = \mathbf{S}_t(X_\tau^+ - X_\tau^-) = X_+(t) - X_-(t)$, $t \geq \tau$, де $\mathbf{S}_t-$ деякий лінійний оператор, $X_\pm(t) = \mathbf{S}_t X_\tau^\pm \in \mathcal{K}$ — розв'язки цієї системи з початковими функціями $X_\tau^\pm(\tau+\xi) \in \mathcal{K}$, $-s \leq \xi \leq 0$. Тому за умов (7.50) з нормальним відтворювальним конусом $\mathcal{K}$ властивості асимптотичної стійкості за Ляпуновим та асимптотичної стійкості в конусі $\mathcal{K}$ системи (7.49) еквівалентні (див. доведення леми 7.7). При цьому асимптотична стійкість цієї системи за відсутності запізнення ($s = 0$) рівносильна додатній оборотності оператора $\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{P}$. Отже, теорема 7.6 у разі $\mathbf{G}(X) \equiv \mathbf{P}X$ дає умови абсолютної стійкості за Ляпуновим лінійної системи (7.49).

Приклад 7.7 Лінійна диференціальна система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-s), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.51}$$

є позитивною щодо конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^n$ тоді і лише тоді, коли позадіагональні елементи матриці $A(t)$ і всі елементи матриці $B(t)$ невід'ємні при $t \geq 0$. Якщо при цьому матриці A і B сталі, то абсолютна стійкість розв'язку $x \equiv 0$ системи (7.51) еквівалентна сумісності системи конусних нерівностей $(A+B)\,x \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} x$.

Приклад 7.8 Нелінійна матрична система

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}(t)X(t) = B(t)X(t-s)B^*(t) + X(t-s)C(t)X(t-s), \tag{7.52}$$

де $\mathbf{L}(t)X = A(t)X + XA^*(t)$ — оператор Ляпунова, позитивна щодо конуса ермітових невід'ємно визначених матриць $\mathcal{K}$, якщо $C(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $t \geq 0$. У цьому випадку систему (7.42) описує оператор $L(t)$, а оператори

$$\mathbf{W}(t,\tau)X = \Delta(t,\tau)X\Delta^*(t,\tau), \quad \mathbf{G}(X,t) = B(t)XB^*(t) + XC(t)X,$$

де $\Delta(t,\tau)$ — матрицант (матриця Коші) системи $\dot{x} + A(t)x = 0$, є додатними щодо конуса $\mathcal{K}$ при $t \geq \tau \geq 0$. У разі сталих матриць A, B і $C = 0$ нульовий розв'язок позитивної системи (7.52) абсолютно стійкий, якщо для деякої матриці $Y = Y^* > 0$ матричне алгебричне рівняння $AX + XA^* - BXB^* = Y$ має розв'язок $X = X^* > 0$.

7.4 Інваріантні множини та конусні нерівності

Розглянемо диференціальну систему:

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X,t), \quad X(\tau) = X_\tau \in \Omega, \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{7.53}$$

де $\mathbf{F} : \mathcal{X} \times [0,\infty) \to \mathcal{X}$ — оператор, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язку $X(t)$ в області $\Omega \subset \mathcal{X}$. Система (7.53) має інваріантну множину $\mathcal{I}_t \subseteq \mathcal{X}$, якщо із $X(\tau) \in \mathcal{I}_\tau$ випливає $X(t) \in \mathcal{I}_t$ при $t > \tau \geq 0$.

Побудуємо інваріантні множини системи (7.53) у вигляді

$$\mathcal{I}_t = \Big\{X \in \Omega : \mathbf{V}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0\Big\}. \tag{7.54}$$

Тут $\mathbf{V} : \mathcal{X} \times [0,\infty) \to \mathcal{E}$ — деякий оператор, $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$ — заданий клин, зокрема конус. Для цього визначимо оператор диференціювання $\mathbf{D}_t$ у силу системи (7.53) як (сильну) похідну складної функції:

$$\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t) = \frac{d}{d\tau}\,\mathbf{V}(\Psi(\tau,t,X),\tau)\big|_{\tau=t}\,, \tag{7.55}$$

де $X(\tau) = \Psi(\tau,t,X)$ — розв'язок цієї системи з початковою умовою $X(t) = X$. Припускатимемо, що оператор-функція $\mathbf{V}(X,t)$ неперервна разом із частинними похідними в області $\Omega \times [0,\infty)$.

Для оператора (7.55) можна використовувати вирази в термінах правої частини системи (7.53). Наприклад, якщо $\mathcal{X} = R^n$ і $\mathcal{E} = R^m$, то

$$\mathbf{D}_t V(x,t) = V'_x(x,t)\,\mathbf{F}(x,t) + V'_t(x,t),$$

де $V'_x(x,t)$ — матриця Якобі розміру $m \times n$, складена з частинних похідних функції V. Аналогічно можна розглядати узагальнення цього співвідношення з використанням похідних Гато та Фреше. Наприклад, можна припускати, що $\mathbf{V}'_t(X,t)$ є сильною похідною за часом t, а $\mathbf{V}'_X(X,t)$ — похідна Гато, тобто лінійний обмежений оператор вигляду $\mathbf{V}'_X(X,t)H = \dfrac{d}{dh}\,\mathbf{V}(X+hH,t)|_{h=0}$. Якщо функція $\mathbf{V}(X,t)$ не є диференційованою, а лише неперервною і локально ліпшицевою, то можна використовувати праві та ліві *похідні Діні* в силу системи (див., наприклад, [41, 82])

$$\mathbf{D}_t^{\pm}\mathbf{V}(X,t) = \limsup_{h\to 0\pm} \frac{1}{h}\left[\mathbf{V}\big(X + h\mathbf{F}(X,t),\, t+h\big) - \mathbf{V}(X,t)\right].$$

Теорема 7.7 *Нехай $\mathcal{K}_t$ — тілесний конус, що задовольняє властивості вкладення* (7.8)*. Тоді $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи* (7.53) *в тому і лише в тому випадку, коли для будь-якого $t \ge 0$ виконується умова*

$$X \in \mathcal{I}_t,\ \ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \ \varphi\big(\mathbf{V}(X,t)\big) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t)\big) \ge 0. \quad (7.56)$$

Доведення. Нехай $X(t)$ — розв'язок системи (7.53) за початкової умови $X(t_0) = X_0 \in \mathcal{I}_{t_0}$. Тоді із означення оператора $\mathbf{D}_t$ випливає співвідношення

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{D}_\tau \mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\,d\tau = \mathbf{V}\big(X(t),t\big) - \mathbf{V}(X_0,t_0).$$

Звідси, зокрема, випливає $\mathbf{V}\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} \mathbf{V}(X_0,t_0)$, якщо $\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0$ при $X \in \mathcal{I}_t$ і $t \ge t_0$. При цьому $\mathbf{V}\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{>} 0$, якщо $\mathbf{V}(X_0,t_0) \overset{\mathcal{K}_{t_0}}{>} 0$.

Припустимо, що в деякий момент часу $\tau \geq t_0$ значення функції $\mathbf{V}(X_\tau, \tau)$, де $X_\tau = X(\tau)$, досягає межі конуса $\mathcal{K}_\tau$. Тоді існує ненульовий функціонал $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$, для якого $\varphi\big(\mathbf{V}(X_\tau, \tau)\big) = 0$.

Визначимо окіл множини (7.54) вигляду

$$\mathcal{I}_t^\varepsilon = \Big\{X \in \Omega : \mathbf{V}_\varepsilon(X,t) = \mathbf{V}(X,t) + \varepsilon\omega(t)Y \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0\Big\},$$

де $\varepsilon > 0$, $Y \in \operatorname{int}\mathcal{K}_\tau$, $\omega(t)$ — невід'ємна неперервно диференційована функція така, що $\omega(\tau) = 0$ і $\dot{\omega}(\tau) > 0$. Покладемо, наприклад, $\omega(t) = \arctan(t-\tau)$. Тоді очевидно $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{I}_t^\varepsilon$, причому $\mathcal{I}_t^\varepsilon \to \mathcal{I}_t$ при $\varepsilon \to 0$ і $t \geq \tau$. Оскільки $V_\varepsilon(X_\tau, \tau) = V(X_\tau, \tau)$ і $\varphi(Y) > 0$, то згідно з (7.56) для деякого $\delta > 0$ при $\tau \leq t \leq \tau + \delta$ маємо

$$\varphi\big(\mathbf{D}_t\mathbf{V}_\varepsilon(X,t)\big) = \varphi\big(\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t)\big) + \frac{\varepsilon}{1+(t-\tau)^2}\,\varphi(Y) \geq 0,$$

$$\int_\tau^{\tau+\delta} \varphi\left(\mathbf{D}_t\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(t),t\big)\right)\,dt = \varphi\big(\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(\tau+\delta), \tau+\delta\big)\big) \geq 0.$$

Це означає, що траєкторія $X(t)$ у момент τ не може залишати множину $\mathcal{I}_\tau^\varepsilon$, тобто $\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ при $\tau \leq t \leq \tau+\delta$. Інакше для деякого $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$ і як завгодно малого $\delta > 0$ виконувалися би співвідношення $\varphi\big(\mathbf{V}(X_\tau,\tau)\big) = 0$ і $\varphi\big(\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(\tau+\delta), \tau+\delta\big)\big) < 0$.

Враховуючи замкненість конуса $\mathcal{K}_t$, при $\varepsilon \to 0$ маємо $\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(t),t\big) \to \mathbf{V}\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$, $\tau \leq t \leq \tau+\delta$. Отже, $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (7.53). Зворотне твердження теореми випливає із теореми Лагранжа:

$$\varphi\big(\mathbf{V}\big(X(\tau+\delta), \tau+\delta\big)\big) - \varphi\big(\mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\big) = \delta\,\varphi\big(\mathbf{D}_\xi\mathbf{V}\big(X(\xi),\xi\big)\big),$$

де $\xi \in (\tau, \tau+\delta)$. Якщо $\varphi\big(\mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\big) = 0$ і $X(\tau+\delta) \in \mathcal{I}_{\tau+\delta}$, то за досить малого $\delta > 0$ необхідно, щоб справджувалася нерівність $\varphi\big(D_\tau\mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\big) \geq 0$. □

Зауваження 7.3 Для виконання умови (7.56) достатньо, щоб для деякої неперервної скалярної функції $\alpha(X,t)$ виконувалася конусна нерівність

$$\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t) + \alpha(X,t)\mathbf{V}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0, \quad X \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0. \tag{7.57}$$

Приклад 7.9 Розглянемо нелінійну систему:

$$\dot{x} = A(x,t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \tag{7.58}$$

Множину (7.54) визначимо за допомогою конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$ і вектор-функції $V(x,t) = R(t)\,x$, де $R(t)$ — невироджена неперервно диференційована матрична функція. Тоді виконується умова (7.57), якщо для деякої функції $\alpha(x,t)$ всі елементи матриці

$$B_\alpha(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t) + R(t)\big[A(x,t) + \alpha(x,t)I\big]R^{-1}(t)$$

є невід'ємними функціями. Останнє обмеження набуває вигляду

$$b_{ij}(x,t) \geq 0, \quad i \neq j, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{7.59}$$

де $b_{ij}(x,t)$ — елементи матриці $B_\alpha(t)$ при $\alpha = 0$. У випадку $R(t) \equiv I$ множина $\mathcal{I}_t$ є конусом $\mathcal{K}$, а нерівності (7.59) узагальнюють відомі умови позитивності лінійних систем щодо $\mathcal{K}$ [36].

Визначимо для системи (7.58) множину (7.54) за допомогою скалярної функції $V(x,t) = x^\top P(t)x + q^\top(t)x + r(t)$, де симетрична матриця $P(t)$, вектор $q(t)$ і скалярна функція $r(t)$ неперервні і диференційовані при $t \geq 0$. Тоді умова (7.57), що забезпечує інваріантність цієї множини для системи (7.58), набуває вигляду

$$x^\top P_\alpha x + q_\alpha^\top x + r_\alpha \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t,\ t \geq 0. \tag{7.60}$$

Тут $P_\alpha = \dot{P}(t) + \alpha(x,t)P(t) + A^\top(x,t)P(t) + P(t)A(x,t)$, $q_\alpha = \dot{q}(t) + \alpha(x,t)q(t) + A^\top(x,t)q(t)$, $r_\alpha = \dot{r}(t) + \alpha(x,t)r(t)$. Зокрема, умова (7.60) є наслідком співвідношень $P_\alpha \geq 0$, $q_\alpha \equiv 0$, $r_\alpha \geq 0$, $x \in \partial\mathcal{I}_t$, $t \geq 0$.

Приклад 7.10 Для нелінійної системи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{7.61}$$

побудуємо умови інваріантності змінного еліпсоїдального конуса $\mathcal{I}_t$, що описується у вигляді (7.54) за умов $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2_+$ і

$V(x,t) = \begin{bmatrix} x^\top Q(t)x & x^\top h \end{bmatrix}^\top$, де $h(t)$ — власний вектор симетричної матриці $Q(t)$ з інерцією $\mathrm{i}\big(Q(t)\big) \equiv \{1, n, 0\}$, що відповідає її додатному власному значенню. В умові (7.56), де

$$\mathbf{D}_t V(x,t) = \begin{bmatrix} x^\top \dot{Q}(t)x + f^\top(x,t)Q(t)x + x^\top Q(t)f(x,t) \\ \dot{h}^\top x + h^\top(t)f(x,t) \end{bmatrix},$$

достатньо використовувати лише два функціонали з $\mathcal{K}^*$. Якщо $\varphi(y) = y_1$, то згідно з (7.56) отримаємо обмеження

$$x^\top \dot{Q}(t)x + f^\top(x,t)Q(t)x + x^\top Q(t)f(x,t) \geq 0, \tag{7.62}$$

де $x \in \partial\mathcal{I}_t$ і $t \geq 0$, причому $\partial\mathcal{I}_t = \{x \in \mathcal{I}_t : x^\top Q(t)x = 0\}$. Якщо взяти $\varphi(y) = y_2$, то в умові (7.56) $x = 0$ і

$$h^\top(t)f(0,t) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{7.63}$$

Тут враховано, що із $x^\top Q(t)x \geq 0$ і $h^\top(t)x = 0$ випливає $x = 0$.

Умови (7.62) і (7.63) забезпечують інваріантність множини $\mathcal{I}_t$ у системі (7.61). Умова (7.63) завжди виконується для систем з нульовим станом рівноваги, тобто при $f(0,t) \equiv 0$. Такою є, наприклад, диференціальна система (7.58), для якої умова (7.57) еквівалентна матричній нерівності

$$\dot{Q}(t) + A^\top(x,t)Q(t) + Q(t)A(x,t) + \alpha(x,t)Q(t) \geq 0, \tag{7.64}$$

де $\alpha(x,t)$ — задана неперервна функція $x \in \partial\mathcal{I}_t$, $t \geq 0$. Матрична нерівність (7.64) забезпечує інваріантність множини $\mathcal{I}_t$ для системи (7.58) і є узагальненням відомих умов інваріантності еліпсоїдного конуса для лінійних автономних систем [7, 145].

Приклад 7.11 Розглянемо лінійну систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ \dot{u} = C(t)x + D(t)u, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geq 0. \tag{7.65}$$

Тут $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ — матричні функції відповідних розмірів $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ і $m \times m$ з елементами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} і d_{ij}. Отримаємо умови інваріантності множини

$$\mathcal{I}_t = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} : \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s u_s \right\}, \tag{7.66}$$

де $\alpha(t)>0$ — задана диференційована функція. Цю множину, що є нормальним тілесним конусом, подають у вигляді (7.54) з оператором $V(x,u,t) = \left[\alpha^2 u_1^2 e - z, \ldots, \alpha^2 u_m^2 e - z, u^\top\right]^\top$, де $e = [1,\ldots,1]$, $z = [x_1^2,\ldots,x_n^2]$. Роль $\mathcal{K}_t$ у теоремі 7.7 відіграє конус невід'ємних векторів $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^{nm+m}$.

Перепишемо умову (7.56) як

$$V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad u_s = 0 \implies c_s^\top x + d_s^\top u \geq 0, \tag{7.67}$$

$$\begin{gathered} V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \alpha^2 u_s^2 = x_k^2 \quad \implies \\ \alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s (c_s^\top x + d_s^\top u) - x_k (a_k^\top x + b_k^\top u) \geq 0. \end{gathered} \tag{7.68}$$

Тут $a_k^\top$, $b_k^\top$, $c_s^\top$ і $d_s^\top$ — рядки відповідних матриць, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}$. В умові (7.67) $x = 0$ і вона набуває вигляду $d_{sj} \geq 0$, $j \neq s$. В умові (7.68) $|x_i| \leq |x_k| = \alpha u_s \leq \alpha u_j$ $\forall i,j$.

Якщо $x_k > 0$, то (7.68) випливає зі співвідношень

$$\alpha d_{sj} - b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|.$$

Справді,

$$\alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s (c_s^\top x + d_s^\top u) - x_k (a_k^\top x + b_k^\top u) = \alpha u_s w_{sk},$$

$$\begin{gathered} w_{sk} = [\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks}]\, u_s + \\ + \sum_{i\neq k} (\alpha c_{si} - a_{ki}) x_i + \sum_{j\neq s} (\alpha d_{sj} - b_{kj}) u_j \geq \\ \geq \left[\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks} - \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\right] u_s + \\ + \sum_{j\neq s} (\alpha d_{sj} - b_{kj}) u_j \geq \\ \geq \left[\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) - \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\right] u_s \geq 0. \end{gathered}$$

Якщо $x_k < 0$, то із (7.68) аналогічно отримаємо обмеження на коефіцієнти:

$$\alpha d_{sj} + b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} + b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} + a_{ki}|.$$

Як наслідок, необхідні та достатні умови позитивності системи (7.65) щодо конуса (7.66) набувають вигляду

$$\alpha d_{sj} \geq |b_{kj}|, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} \pm \alpha(\alpha c_{sk} \mp a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} \mp b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} \mp a_{ki}|. \qquad (7.69)$$

де $t \geq 0$, $k, i = \overline{1, n}$, $s, j = \overline{1, m}$. Для встановлення необхідності цих умов слід покласти $x_k = \pm\alpha\, u_s$, $x_i = -\mathrm{sign}(\alpha c_{si} \mp a_{ki})\alpha u_s$, $i \neq k$, і розглянути випадки: 1) всі компоненти вектора u збігаються, 2) одна із компонентів u набагато більша за всі інші компоненти.

Кожній функції $\alpha(t) > 0$, що задовольняє систему нерівностей (7.69), відповідає інваріантний конус (7.66) системи (7.65).

Зазначимо, що систему нерівностей (7.69) можна використовувати під час побудови керування у вигляді динамічного компенсатора, що забезпечує позитивну стабілізацію системи (7.65).

Приклад 7.12 Розглянемо диференціальну систему:

$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + A(t)x = 0, \quad t \geq 0, \qquad (7.70)$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — обмежені матриці. Якщо для деякої функції $\alpha(t)$ виконується система нерівностей

$$b_{sj}(t) \leq -\frac{1}{\alpha(t)} < 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha}(t) - \alpha(t) \sum_j b_{sj}(t) \geq |\alpha^2(t) a_{sk}(t) + 1| + \alpha^2(t) \sum_{i \neq k} |a_{si}(t)|,$$

$$t \geq 0, \quad i, j, k, s = \overline{1, n},$$

то система (7.70) має інваріантну множину

$$\mathcal{I}_t = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} : \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s \dot{x}_s \right\}.$$

Це твердження встановлюється зведенням системи (7.70) до форми Коші:

$$\dot{z} = M(t)z, \quad M(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A(t) & -B(t) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{7.71}$$

з використанням співвідношень (7.69).

Виходячи зі співвідношень (7.57) і (7.71), можна побудувати інваріантні множини системи (7.70) у вигляді (7.54) з квадратичною функцією $V(z) = z^\top Qz$. Наприклад, у разі сталих матриць, покладаючи

$$Q = \begin{bmatrix} S + B^\top RB & B^\top R \\ RB & R \end{bmatrix},$$

і використовуючи лему Шура, отримуємо умови

$$\alpha^2 S - \alpha(B^\top S + SB) - (S - A^\top R)R^{-1}(S - RA) \leq 0, \quad R = R^\top < 0,$$

виконання яких за деякого $\alpha < 0$ забезпечує системі (7.70) інваріантну множину вигляду

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} : x^\top (S + B^\top RB)x + 2\dot{x}^\top RBx + \dot{x}^\top R\dot{x} \geq 0 \right\}.$$

Якщо $S = A^\top R + RA > 0$, то матриці A і B повинні бути гурвіцевими. У випадку $\mathrm{i}(S) = \{1, n-1, 0\}$ ця множина складається з двох протилежних еліпсоїдальних конусів у фазовому просторі системи (7.71).

7.5 Узагальнений метод порівняння систем

У теорії стійкості руху застосовуються методи порівняння, що ґрунтуються на відображенні простору станів складної системи у простір станів допоміжної системи (див., наприклад, [2,41,82,88]).

Системи порівняння будують у класах позитивних та монотонних систем щодо заданих конусів. Наведемо узагальнену методику порівняння систем, що випливає із методу побудови інваріантних множин (див. підрозд. 7.4). Ця методика дає змогу порівнювати динамічні властивості скінченної сім'ї динамічних систем, що функціонують у різних просторах.

Розглянемо сім'ю незалежних систем:

$$\mathcal{S}_i: \quad \dot{X}_i = \mathbf{F}_i(X_i, t), \quad X_i \in \mathcal{X}_i, \ \ t \geq 0, \ \ i = \overline{1, s}. \tag{7.72}$$

Для спрощення викладок введемо позначення $X = \big[X_1, \ldots, X_s\big]$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_s$, $\mathbf{F}(X, t) = \big[\mathbf{F}_1(X_1, t), \ldots, \mathbf{F}_s(X_s, t)\big]$, при цьому сім'ю систем (7.72) подають у вигляді

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X, t), \quad X \in \mathcal{X}, \ \ t \geq 0. \tag{7.73}$$

Припустимо, що кожній початковій умові $X(t_0) = X_0 \in \Omega$ відповідає єдиний розв'язок $X(t)$ системи (7.73) у деякій області $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ при $t \geq t_0 \geq 0$.

Нехай $\mathcal{E}$ — простір з клином $\mathcal{V}_t$ і задано відображення $\mathbf{W} : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$, що є неперервно диференційованою в області $\Omega \times [0, \infty)$ оператор-функцією і не є всюди додатним щодо $\mathcal{V}_t$.

Означення 7.2 Сім'ю систем (7.72) називають *порівнянною*, якщо для будь-якого $\tau \geq 0$ виконується умова

$$\mathbf{W}\big(X(\tau), \tau\big) \in \mathcal{V}_\tau \implies \mathbf{W}\big(X(t), t\big) \in \mathcal{V}_t, \quad t \geq \tau. \tag{7.74}$$

При цьому $\mathbf{W}$ є *оператором порівняння* таких систем.

Безпосередньо з теореми 7.7 випливає таке твердження.

Теорема 7.8 *Нехай $\mathcal{V}_t$ — тілесний конус, що задовольняє властивості вкладення* (7.8)*. Тоді сім'я систем* (7.72) *є порівнянною в тому і лише в тому випадку, коли для будь-якого $t \geq 0$ виконується умова*

$$\mathbf{W}(X, t) \in \mathcal{V}_t, \ \ \varphi \in \mathcal{V}_t^*, \ \ \varphi\big(\mathbf{W}(X, t)\big) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{D}_t \mathbf{W}(X, t)\big) \geq 0, \tag{7.75}$$

де $\mathbf{D}_t$ — оператор диференціювання в силу системи (7.73).

Зазначимо, що умова (7.75) є наслідком конусної нерівності

$$\mathbf{D}_t\mathbf{W}(X,t) + \alpha(X,t)\mathbf{W}(X,t) \overset{\mathcal{V}_t}{\geq} 0, \quad X \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0,$$

де $\mathcal{I}_t = \{X \in \mathcal{X} : \mathbf{W}(X,t) \in \mathcal{V}_t\}$, $\alpha(X,t)$ — скалярна неперервна функція.

Сформулюємо основні твердження принципу порівняння для двох та трьох систем з нульовими положеннями рівноваги, які за певних умов є наслідками теореми 7.8. При цьому у фазових просторах систем порівняння використовуємо лише нормальні відтворювальні конуси $\mathcal{K}_t$ з обмеженою сталою нормальності.

Випадок 1. Нехай $s = 2$, $\mathbf{F}_1(\Theta,t) \equiv 0$, $\mathbf{F}_2(\Phi,t) \equiv 0$ і $\mathbf{W}(X,t) = X_2 - \mathbf{V}(X_1,t)$, де $\mathbf{V} : \mathcal{X}_1 \times [0,\infty) \to \mathcal{X}_2$ — неперервна всюди додатна щодо нормального відтворювального конуса $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}_2$ оператор-функція. Якщо $\mathbf{F}_2 \in \overline{\mathcal{F}}_2(\Phi)$ і

$$\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X_1,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}_2\big(\mathbf{V}(X_1,t),t\big), \quad t \geq 0, \tag{7.76}$$

то з означення класу оператор-функцій $\overline{\mathcal{F}}_2(\Phi)$ (див. підрозд. 7.2) випливає, що $\mathcal{S}_2$ є *верхньою системою порівняння* для системи $\mathcal{S}_1$, тобто

$$\Phi \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \mathbf{V}\big(X_1(\tau),\tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_2(\tau) \implies \Phi \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{V}\big(X_1(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_2(t), \quad t > \tau.$$

Це означає, що системи $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$ можна порівняти в сенсі означення 7.2 з оператором порівняння $\mathbf{W}$.

Припустимо, що оператор $\mathbf{V}$ має додаткові властивості:

$$\mathbf{V}(\Theta,t) \equiv \Phi, \quad \|\mathbf{V}(X,t) - \Phi\| \geq v(X) > 0, \quad X \neq \Theta, \quad t \geq 0, \tag{7.77}$$

де v — неперервна функція така, що $v(\Theta) = 0$ і

$$v(X) \leq v(Y) \implies \|X - \Theta\| \leq \|Y - \Theta\|.$$

Теорема 7.9 *Нехай $\mathbf{F}_2 \in \overline{\mathcal{F}}_2(\Phi)$, а всюди додатний оператор $\mathbf{V}$ задовольняє умови (7.76) і (7.77). Тоді стан $X_1 \equiv \Theta$ системи $\mathcal{S}_1$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стан $X_2 \equiv \Phi$ системи $\mathcal{S}_2$ стійкий (асимптотично стійкий) у $\mathcal{K}_t^+(\Phi)$.*

Випадок 2. Нехай $s = 3$, $\mathbf{F}_1(\Phi, t) \equiv \mathbf{F}_3(\Phi, t) \equiv 0$, $\mathbf{F}_2(\Theta, t) \equiv 0$, $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_3$ і $\mathbf{W}(X, t) = \big[\mathbf{V}(X_2, t) - X_1,\, X_3 - \mathbf{V}(X_2, t)\big]$, де $\mathbf{V} : \mathcal{X}_2 \times [0, \infty) \to \mathcal{X}_1$ — неперервне відображення і $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}_1$ — нормальний відтворювальний конус.

Якщо $\mathbf{F}_1 \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$, $\mathbf{F}_3 \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$ і

$$\mathbf{F}_1\big(\mathbf{V}(X_2, t), t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} \mathbf{D}_t \mathbf{V}(X_2, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} \mathbf{F}_3\big(\mathbf{V}(X_2, t), t\big), \quad t \ge 0, \tag{7.78}$$

то із означення класів оператор-функцій $\underline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$ і $\overline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$ при $X_1(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^-(\Phi)$, $X_3(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Phi)$ і $t > \tau \ge 0$ маємо

$$X_1(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} \mathbf{V}\big(X_2(\tau), \tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} X_3(\tau) \implies X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} \mathbf{V}\big(X_2(t), t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X_3(t). \tag{7.79}$$

Це означає, що три системи $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ і $\mathcal{S}_3$ можна порівняти в сенсі означення 7.2 з оператором порівняння $\mathbf{W}$ щодо конуса $\mathcal{V}_t = \mathcal{K}_t \times \mathcal{K}_t$. При цьому $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_3$ є відповідно *нижньою* та *верхньою системами порівняння* для системи $\mathcal{S}_2$.

Теорема 7.10 *Нехай* $\mathbf{F}_1 \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$, $\mathbf{F}_3 \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$, *а оператор* $\mathbf{V}$ *задовольняє умови* (7.77) *і* (7.78). *Тоді стан* $X_2 \equiv \Theta$ *системи* $\mathcal{S}_2$ *стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стани* $X_1 \equiv \Phi$ *системи* $\mathcal{S}_1$ *і* $X_3 \equiv \Phi$ *системи* $\mathcal{S}_3$ *стійкі (асимптотично стійкі) відповідно в* $\mathcal{K}_t^-(\Phi)$ *і* $\mathcal{K}_t^+(\Phi)$.

Доведення. Оскільки конус $\mathcal{K}_t$ відтворювальний і несплющений, то $\mathbf{V}(X_2(\tau), \tau) - \Phi = U_+ - U_-$, $\|U_\pm\| \le \gamma\, \|\mathbf{V}(X_2(\tau), \tau) - \Phi\|$ і $U_\pm \in \mathcal{K}_\tau$, де $\gamma > 0$ — універсальна стала. Нехай $X_1(t)$ і $X_3(t)$ — розв'язки систем $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_3$ з початковими умовами $X_1(\tau) = \Phi - U_- \in \mathcal{K}_\tau^-(\Phi)$ і $X_3(\tau) = \Phi + U_+ \in \mathcal{K}_\tau^+(\Phi)$. Тоді $X_1(t) \in \mathcal{K}_t^-(\Phi)$ і $X_3(t) \in \mathcal{K}_t^+(\Phi)$ при $t \ge \tau$, якщо

$$\|X_1(\tau) - \Phi\| \le \gamma\, \|\mathbf{V}\big(X_2(\tau), \tau\big) - \Phi\|,$$

$$\|X_3(\tau) - \Phi\| \le \gamma\, \|\mathbf{V}\big(X_2(\tau), \tau\big) - \Phi\|.$$

Враховуючи (7.79) та нормальність конуса $\mathcal{K}_t$, маємо

$$\|\mathbf{V}\big(X_2(t), t\big) - \Phi\| \le \alpha \|X_1(t) - \Phi\| + \beta \|X_3(t) - \Phi\|, \quad t \ge \tau.$$

де $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ залежить від сталої нормальності $\mathcal{K}_t$.

Із умов (7.77) і неперервності $\mathbf{V}(X,t)$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_0 > 0$, що $\|X_2(t) - \Theta\| \leq \varepsilon$, якщо $\|\mathbf{V}\big(X_2(t),t\big) - \Phi\| \leq \delta_0$ при $t \geq \tau$.

Використовуючи припущення щодо стійкості стану $X_1 \equiv \Phi$ системи $\mathcal{S}_1$ та стану $X_3 \equiv \Phi$ системи $\mathcal{S}_3$ відповідно в $\mathcal{K}_t^-(\Phi)$ і $\mathcal{K}_t^+(\Phi)$, виберемо $\delta_\pm > 0$ так, щоб із $\|X_1(\tau) - \Phi\| \leq \delta_-$ і $\|X_3(\tau) - \Phi\| \leq \delta_+$ випливали відповідні нерівності $\|X_1(t) - \Phi\| \leq \delta_0/(2\alpha)$ і $\|X_3(t) - \Phi\| \leq \delta_0/(2\beta)$ при $t \geq \tau$. Далі, виберемо $\delta > 0$ так, щоб

$$\|X_2(\tau) - \Theta\| \leq \delta \implies \|\mathbf{V}\big(X_2(\tau),\tau\big) - \Phi\| \leq \min\{\delta_-, \delta_+\}/\gamma.$$

Тоді, враховуючи наведені співвідношення, маємо $\|X_2(t) - \Theta\| \leq \varepsilon$ при $t > \tau$, тобто стан $X_2 \equiv \Theta$ системи $\mathcal{S}_2$ стійкий за Ляпуновим. При цьому $X_2(t) \to \Theta$, якщо $X_1(t) \to \Phi$ і $X_3(t) \to \Phi$, $t \to \infty$. □

Доведення теорем 7.9 і 7.10 аналогічні. Зазначимо, що в разі використання цих теорем належність оператор-функцій класам типу $\underline{\mathcal{F}}_k(\Phi)$ і $\overline{\mathcal{F}}_k(\Phi)$ можна встановити за допомогою лем 7.3 і 7.4.

Випадок 3. Нехай $s \geq 2$. Задачу *впорядкування* та знаходження в певному сенсі *домінуючої* системи сім'ї (7.72) можна сформулювати у вигляді узагальненої задачі порівняння цієї сім'ї, використовуючи оператор порівняння вигляду

$$\mathbf{W}(X,t) = \big[\mathbf{V}_2(X_2,t) - \mathbf{V}_1(X_1,t), \ldots, \mathbf{V}_s(X_s,t) - \mathbf{V}_{s-1}(X_{s-1},t)\big],$$

де $\mathbf{V}_i : \mathcal{X}_i \times [0,\infty) \to \mathcal{E}_1$ — неперервне відображення, $\mathcal{E}_1$ — простір з клином $\mathcal{K}_t$. У цьому випадку умова порівняння (7.74) щодо клину $\mathcal{V}_t = \mathcal{K}_t \times \cdots \times \mathcal{K}_t$ означає, що

$$\mathbf{V}_1\big(X_1(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{V}_2\big(X_2(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \ldots \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{V}_s\big(X_s(t),t\big), \quad t > \tau \geq 0,$$

якщо $\mathbf{V}_1\big(X_1(\tau),\tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \mathbf{V}_2\big(X_2(\tau),\tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \ldots \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \mathbf{V}_s\big(X_s(\tau),\tau\big)$. Наприклад, якщо $\mathbf{V}_i(X_i,t) = \|X_i\|_{\mathcal{E}_i}$, то норми розв'язків систем (7.72) впорядковані, тобто

$$\|X_1(t)\|_{\mathcal{E}_1} \leq \|X_2(t)\|_{\mathcal{E}_2} \leq \cdots \leq \|X_s(t)\|_{\mathcal{E}_s}, \quad t > \tau \geq 0,$$

коли $\|X_1(\tau)\|_{\mathcal{E}_1} \leq \|X_2(\tau)\|_{\mathcal{E}_2} \leq \cdots \leq \|X_s(\tau)\|_{\mathcal{E}_s}$.

Приклад 7.13 Розглянемо сім'ю нелінійних систем:

$$\dot{x}_i = A_i(x_i, t)x_i, \quad x_i \in \mathbb{C}^{n_i}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, s}, \tag{7.80}$$

де $A_i(x_i, t)$ — неперервні матричні функції розмірів $n_i \times n_i$. Визначимо оператор порівняння такої сім'ї за допомогою конуса $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+^{s-1}$:

$$\mathbf{W}(X, t) = \left[x_2^* Q_2 x_2 - x_1^* Q_1 x_1, \ldots, x_s^* Q_s x_s - x_{s-1}^* Q_{s-1} x_{s-1}\right],$$

де $Q_i(t) \equiv Q_i^*(t) > 0$ — задані матриці. Тоді

$$\mathbf{D}_t \mathbf{W}(X, t) = \left[x_2^* H_2 x_2 - x_1^* H_1 x_1, \ldots, x_s^* H_s x_s - x_{s-1}^* H_{s-1} x_{s-1}\right].$$

Тут $H_i(x_i, t) = \dot{Q}_i(t) + A_i^*(x_i, t)Q_i(t) + Q_i(t)A_i(x_i, t)$, $i = \overline{1, s}$.

Використовуючи теорему 7.8 і двосторонні оцінки

$$\lambda_{\min}(H_i - \lambda Q_i)\, x_i^* Q_i x_i \leq x_i^* H_i x_i \leq \lambda_{\max}(H_i - \lambda Q_i)\, x_i^* Q_i x_i,$$

можна встановити, що розв'язки систем (7.80) впорядковані:

$$x_1^*(t) Q_1(t) x_1(t) \leq x_2^*(t) Q_2(t) x_2(t) \leq \cdots \leq x_s^*(t) Q_s(t) x_s(t),$$

якщо

$$\lambda_{\max}(H_i - \lambda Q_i) \leq \lambda_{\min}(H_{i+1} - \lambda Q_{i+1}),\ i = \overline{1, s-1}, t \geq \tau \geq 0,$$

$$x_1^*(\tau) Q_1(\tau) x_1(\tau) \leq x_2^*(\tau) Q_2(\tau) x_2(\tau) \leq \cdots \leq x_s^*(\tau) Q_s(\tau) x_s(\tau).$$

В окремому випадку $Q_i \equiv I_{n_i}$ одержуємо нерівності

$$\lambda_{\max}(A_i^* + A_i) \leq \lambda_{\min}(A_{i+1}^* + A_{i+1}), \quad i = \overline{1, s-1}, \tag{7.81}$$

що забезпечують впорядкування розв'язків систем (7.80) за евклідовою нормою. Тут для ермітових матриць і в'язок матриць через $\lambda_{\max}(\cdot)$ і $\lambda_{\min}(\cdot)$ позначені їхні максимальні та мінімальні власні значення. Якщо всі системи (7.80) є лінійними і стаціонарними, то за умов (7.81) можна впорядкувати також області розташування спектрів цих систем, обмежених вертикальними прямими [132].

7.6 Робастна стійкість позитивних систем

Розглянемо сім'ю диференціальних систем типу (7.53):

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X,t), \quad \mathbf{F}(\Theta,t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \tag{7.82}$$

$$\underline{\mathbf{F}}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{\mathbf{F}}(X,t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{7.83}$$

де $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}$ — нормальний відтворювальний конус з обмеженою сталою нормальності, і виділимо дві граничні системи:

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\mathbf{F}}(\underline{X},t), \quad \underline{\mathbf{F}}(\Theta,t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \tag{7.84}$$

$$\dot{\overline{X}} = \overline{\mathbf{F}}(\overline{X},t), \quad \overline{\mathbf{F}}(\Theta,t) \equiv 0, \quad t \geq 0. \tag{7.85}$$

Якщо $\underline{\mathbf{F}} \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ і $\overline{\mathbf{F}} \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$, то при $\underline{X}(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$ і $\overline{X}(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$ маємо

$$\underline{X}(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \overline{X}(\tau) \implies \underline{X}(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{X}(t), \quad t > \tau \geq 0.$$

У цьому випадку (7.84) $\big((7.85)\big)$ є нижньою (верхньою) системою порівняння для кожної системи (7.82), (7.83). Поклавши в теоремі 7.10 $\mathbf{V}(X,t) \equiv X$ і $\Theta = \Phi$, одержимо такий результат.

Теорема 7.11 *Нехай* $\underline{\mathbf{F}} \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ *і* $\overline{\mathbf{F}} \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$. *Тоді стан* $X \equiv \Theta$ *кожної системи* (7.82), (7.83) *стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стани* $\underline{X} \equiv \Theta$ *системи* (7.84) *та* $\overline{X} \equiv \Theta$ *системи* (7.85) *стійкі (асимптотично стійкі) відповідно в* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ *і* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$.

Для сімей систем вигляду (7.82), що визначаються умовами

$$\underline{\mathbf{F}}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{\mathbf{F}}(X,t), \quad X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.86}$$

$$\underline{\mathbf{F}}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{\mathbf{F}}(X,t), \quad X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.87}$$

виконуються такі твердження.

Теорема 7.12 *Нехай* $\mathcal{K}_t$ *— нормальний тілесний конус, що має властивість* (7.8). *Якщо виконується умова* (7.86) *при* $\underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$ *і* $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_2^+(\Theta)$, *то зі стійкості (асимптотичної стійкості) в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ *стану* $\overline{X} \equiv \Theta$ *системи* (7.85) *випливає стійкість (асимптотична стійкість) у* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ *стану* $X \equiv \Theta$ *кожної системи* (7.82), (7.86). *Аналогічно, якщо виконується умова* (7.87) *при* $\underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_2^-(\Theta)$ *і* $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, *то зі стійкості (асимптотичної стійкості) в* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ *стану* $\underline{X} \equiv \Theta$ *системи* (7.84) *випливає стійкість (асимптотична стійкість) у* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ *стану* $X \equiv \Theta$ *кожної системи* (7.82), (7.87).

За умов теореми 7.12 для розв'язків системи (7.82) виконуються відповідні оцінки

$$\Theta \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \overline{X}(\tau) \implies \Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{X}(t), \quad t > \tau \geq 0,$$

$$\underline{X}(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \Theta \implies \underline{X}(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \Theta, \quad t > \tau \geq 0.$$

При цьому із (7.86) і $\underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$ випливає $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$. Аналогічно, за умови (7.87) із $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$ випливає $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$.

Розглянемо сім'ї нелінійних систем:

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X,t)X, \quad t \geq 0, \tag{7.88}$$

які визначають операторні нерівності

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) \trianglelefteq \mathbf{A}(X,t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{A}}(X,t), \quad X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0, \ \ t \geq 0, \tag{7.89}$$

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) \trianglelefteq \mathbf{A}(X,t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{A}}(X,t), \quad X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} 0, \ \ t \geq 0. \tag{7.90}$$

Припустимо, що значення оператор-функцій $\mathbf{A}(X,t)$, $\underline{\mathbf{A}}(X,t)$ і $\overline{\mathbf{A}}(X,t)$ є лінійними обмеженими операторами в $\mathcal{X}$. Нехай $X \equiv \Theta$– спільний стан рівноваги кожної системи даних сімей, включаючи граничні системи

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\mathbf{A}}(\underline{X},t)\underline{X}, \quad t \geq 0, \tag{7.91}$$

$$\dot{\overline{X}} = \overline{\mathbf{A}}(\overline{X},t)\overline{X}, \quad t \geq 0. \tag{7.92}$$

Тоді або $\Theta = 0$, або $\Theta \neq 0$ і $\Theta \in \ker \mathbf{A}(\Theta, t)$ при $t \geq 0$.

Сформулюємо наслідки теореми 7.12 та леми 7.3, використовуючи обмеження

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) + \underline{\mathbf{B}}_+(X,t) \trianglerighteq \underline{\beta}_+(X,t)\,\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.93}$$

$$\overline{\mathbf{A}}(X,t) + \overline{\mathbf{B}}_+(X,t) \trianglerighteq \overline{\beta}_+(X,t)\,\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.94}$$

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) + \underline{\mathbf{B}}_-(X,t) \trianglerighteq \underline{\beta}_-(X,t)\,\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.95}$$

$$\overline{\mathbf{A}}(X,t) + \overline{\mathbf{B}}_-(X,t) \trianglerighteq \overline{\beta}_-(X,t)\,\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.96}$$

де $\underline{\mathbf{B}}_\pm(X,t)H = [\underline{\mathbf{A}}'_\pm(X,t)H]X$, $\overline{\mathbf{B}}_\pm(X,t)H = [\overline{\mathbf{A}}'_\pm(X,t)H]X$, $\underline{\mathbf{A}}'_\pm(X,t)$ і $\overline{\mathbf{A}}'_\pm(X,t)$ — похідні Гато за конусом $\pm\mathcal{K}_t$, $\underline{\beta}_\pm(X,t)$ і $\overline{\beta}_\pm(X,t)$ — скалярні функції.

Наслідок 7.3 *Нехай $\mathcal{K}_t$ — нормальний тілесний конус, що має властивість* (7.8). *Якщо виконуються умови* (7.93) *і* (7.94), *то зі стійкості (асимптотичної стійкості) в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ стану $\overline{X} \equiv \Theta$ системи* (7.92) *випливає стійкість (асимптотична стійкість) у $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ стану $X \equiv \Theta$ кожної системи* (7.88), (7.89). *Аналогічно, за умов* (7.95) *і* (7.96) *зі стійкості (асимптотичної стійкості) в $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ стану $\underline{X} \equiv \Theta$ системи* (7.91) *випливає стійкість (асимптотична стійкість) у $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ стану $X \equiv \Theta$ кожної системи* (7.88), (7.90).

Зазначимо, що в наслідку 7.3 замість (7.93) і (7.96) можна використати відповідні обмеження:

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) \trianglerighteq \underline{\alpha}_+(X,t)\,\mathbf{I},\ \underline{\mathbf{A}}(X,t)\Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0,\ X - \Theta \in \partial\mathcal{K}_t,\ t \geq 0, \tag{7.97}$$

$$\overline{\mathbf{A}}(X,t) \trianglerighteq \overline{\alpha}_-(X,t)\,\mathbf{I},\ \overline{\mathbf{A}}(X,t)\Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} 0,\ \Theta - X \in \partial\mathcal{K}_t,\ t \geq 0. \tag{7.98}$$

Приклад 7.14 Розглянемо сім'ю систем:

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad \underline{A}(x,t) \trianglelefteq A(x,t) \trianglelefteq \overline{A}(x), \quad x \in \mathcal{K}, \quad t \geq 0, \tag{7.99}$$

де $\underline{A}(x,t) = \underline{A}_0(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \underline{A}_j(t)$, $\overline{A}(x) = \overline{A}_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \overline{A}_j$, $\underline{A}_i(t) \trianglelefteq \overline{A}_i$, $\underline{A}_i(t) = \|\underline{a}_{ks}^{(i)}(t)\|_{k,s=1}^n$ і $\overline{A}_i = \|\overline{a}_{ks}^{(i)}\|_{k,s=1}^n$ — матриці розміру $n \times n$,

$i = \overline{0,n}$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$ — конус невід'ємних векторів, $\trianglelefteq$ означає поелементну матричну нерівність.

Похідні Гато (Фреше) векторних функцій $F(x,t) = A(x,t)x$, $\underline{F}(x,t) = \underline{A}(x,t)x$ і $\overline{F}(x) = \overline{A}(x)x$ визначаються як

$$F'(x,t) = A(x,t) + B(x,t), \quad B(x,t) = \left[\frac{\partial A}{\partial x_1}\, x, \ldots, \frac{\partial A}{\partial x_n}\, x\right],$$

$$\underline{F}'(x,t) = \underline{A}_0(t) + \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{B}_j(t), \quad \overline{F}'(x) = \overline{A}_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{B}_j,$$

де $\underline{B}_j(t) = \|\underline{a}^{(j)}_{ks}(t) + \underline{a}^{(s)}_{kj}(t)\|^n_{k,s=1}$, $\overline{B}_j = \|\overline{a}^{(j)}_{ks} + \overline{a}^{(s)}_{kj}\|^n_{k,s=1}$. Умови (7.93) і (7.97) при $\Theta = 0$ набувають вигляду

$$\underline{a}^{(0)}_{ks}(t) \geq 0, \quad \underline{a}^{(j)}_{ks}(t) + \underline{a}^{(s)}_{kj}(t) \geq 0, \quad k \neq s, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\underline{a}^{(i)}_{ks}(t) \geq 0, \quad k \neq s, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{0,n}.$$

Якщо виконується одна з цих умов і, крім того,

$$\overline{A}_0^{-1} \trianglelefteq 0, \quad \overline{a}^{(0)}_{ks} \geq 0, \quad \overline{a}^{(j)}_{ks} + \overline{a}^{(s)}_{kj} \geq 0, \quad k \neq s, \quad j = \overline{1,n},$$

то нульовий стан кожної системи (7.99) асимптотично стійкий у $\mathcal{K}$ (див. теорему 7.3 та наслідки 7.1 і 7.3).

Розглянемо параметричну сім'ю нелінійних систем:

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X,p)X, \quad \mathbf{A}(X,p) = \sum_{i=1}^{s} p_i \mathbf{A}_i(X), \;\; X \in \mathcal{X}, \;\; t \geq 0, \quad (7.100)$$

де $p = [p_1, \ldots, p_s]^\top \in \mathbb{R}^s_+$ — вектор невід'ємних параметрів, а значення оператор-функцій $\mathbf{A}_i(X)$ є лінійними обмеженими операторами в $\mathcal{X}$.

Наслідок 7.4 *Нехай усі оператори* $\mathbf{A}_i(X)$ *задовольняють одну з умов наслідку* 7.1 *типу позадіагональної додатності щодо нормального тілесного конуса* $\mathcal{K}$ *і сумісною є система конусних нерівностей*

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{A}_i(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad i = \overline{1,s}.$$

Тоді стан $X \equiv 0$ *кожної системи* (7.100) *при* $p \in \mathbb{R}^s_+$ *асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

Розглянемо сім'ю лінійних систем:

$$\dot{X} = \mathbf{A}(t)X, \quad \underline{\mathbf{A}}(t) \trianglelefteq \mathbf{A}(t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{A}}(t), \quad t \geq 0, \tag{7.101}$$

де операторна нерівність $\trianglelefteq$ породжується нормальним відтворювальним конусом $\mathcal{K}_t$. Виділимо в (7.101) дві системи:

$$\dot{X} = \underline{\mathbf{A}}(t)X, \tag{7.102}$$

$$\dot{X} = \overline{\mathbf{A}}(t)X. \tag{7.103}$$

Теорема 7.13 *Кожна система* (7.101) *є позитивною щодо $\mathcal{K}_t$, якщо*

$$e^{\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad t \geq \vartheta \geq \tau \geq 0, \quad t - \tau \geq h \geq 0. \tag{7.104}$$

Якщо система (7.103) *асимптотично стійка, то кожна позитивна система* (7.101) *асимптотично стійка.*

Доведення. За умови (7.104) для конуса $\mathcal{K}_t$ виконується властивість (7.8). Розв'язок системи (7.101) має вигляд $X(t) = \mathbf{E}_A(t,\tau)X_\tau$, де $\mathbf{E}_A(t,\tau)$ — еволюційний оператор, $X(\tau) = X_\tau$ — початковий стан. Еволюційний та експоненціальний оператори системи (7.101) пов'язані співвідношеннями [26]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A(t,\tau) &= \lim_{n\to\infty} \left[e^{\mathbf{A}(\vartheta_n)\,h_n} \,\ldots\, e^{\mathbf{A}(\vartheta_1)\,h_n}\right], \\ e^{\mathbf{A}(\vartheta)\,h} &= \lim_{n\to\infty} \left[\mathbf{E}_A(\vartheta, \vartheta - h/n)\right]^n, \end{aligned} \tag{7.105}$$

де $\vartheta_k \in \left[t_k, t_{k+1}\right]$, $t_k = \tau + kh_n$, $h_n = (t-\tau)/n$, $k = \overline{0,n}$, $t \geq \tau$, $\vartheta \geq 0$, $h \geq 0$. Якщо $\mathbf{A}(t)\mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_t$, то за умови (7.8) маємо

$$e^{\mathbf{A}(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\mathbf{A}^k(\vartheta)\,\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad \tau \leq \vartheta \leq t, \quad 0 \leq h \leq t - \tau.$$

Якщо $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_2(t)$, $e^{\mathbf{A}_1(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$ і $e^{\mathbf{A}_2(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$, то $e^{\mathbf{A}(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$, де [26]

$$e^{\mathbf{A}(\vartheta)h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \left[e^{\mathbf{A}_1(\vartheta)\,\frac{h}{n}} e^{\mathbf{A}_2(\vartheta)\,\frac{h}{n}} + e^{\mathbf{A}_2(\vartheta)\,\frac{h}{n}} e^{\mathbf{A}_1(\vartheta)\,\frac{h}{n}}\right]^n,$$

і згідно з (7.105) $\mathbf{E}_A(t,\tau)\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$. Зокрема, поклавши $\mathbf{A}_1(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)$ і $\mathbf{A}_2(t) = \mathbf{A}(t) - \underline{\mathbf{A}}(t)$, за умови (7.104) одержуємо властивість позитивності кожної системи (7.101) щодо $\mathcal{K}_t$. Причому, у разі сталого конуса умова (7.104) необхідна для позитивності системи (7.102).

Нехай $X(t)$ і $\overline{X}(t)$ — розв'язки систем (7.101) і (7.103) за відповідних початкових умов $X(\tau) = X_\tau$ і $\overline{X}(\tau) = \overline{X}_\tau$. Тоді $0 \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{X}(t)$ при $t \geq \tau \geq 0$, якщо $0 \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \overline{X}_\tau$. З огляду на нормальність конуса $\mathcal{K}_t$ із асимптотичної стійкості системи (7.103) випливає асимптотична стійкість у $\mathcal{K}_t$ кожної позитивної системи (7.101). Це твердження також виконується для конуса $-\mathcal{K}_t$. Якщо при цьому конус $\mathcal{K}_t$ відтворювальний, то кожна система (7.101) асимптотично стійка за Ляпуновим (див. доведення теореми 7.10). □

Зауваження 7.4 Кожна система (7.101) є позитивною щодо $\mathcal{K}_t$, якщо для деякої скалярної функції $\alpha(t)$ виконується операторна нерівність $\underline{\mathbf{A}}(t) \trianglerighteq \alpha(t)\,\mathbf{I}$. З цієї нерівності випливає умова (7.104) за обмеження (7.8). Справді, $e^{\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)\,\delta} = e^{\alpha(\vartheta)\,\delta}\, e^{[\underline{\mathbf{A}}(\vartheta) - \alpha(\vartheta)\,\mathbf{I}]\,\delta}$ і

$$e^{\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)\,\delta}\mathcal{K}_\tau = e^{\alpha(\vartheta)\,\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}\big[\underline{\mathbf{A}}(\vartheta) - \alpha(\vartheta)\mathbf{I}\big]^k\,\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_\vartheta \subseteq \mathcal{K}_t.$$

Приклад 7.15 Розглянемо сім'ю лінійних систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \underline{A}(t) \trianglelefteq A(t) \trianglelefteq \overline{A}, \quad \overline{A}^{-1} \trianglelefteq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (7.106)$$

де $\underline{A}(t)$ — матрична функція з невід'ємними позадіагональними елементами, $-\overline{A}$ — M-матриця, $\trianglelefteq$ означає поелементну матричну нерівність. Система $\dot{x} = \underline{A}(t)x$ позитивна щодо конуса $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$, а система $\dot{x} = \overline{A}x$ асимптотично стійка. Тому кожна система (7.106) асимптотично стійка та позитивна щодо $\mathbb{R}^n_+$.

Приклад 7.16 Розглянемо сім'ю матричних систем

$$\dot{X} = \mathbf{M}(t)X, \quad \underline{\mathbf{M}}(t) \trianglelefteq \mathbf{M}(t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{M}}(t), \quad X \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad t \geq 0, \quad (7.107)$$

$$\underline{\mathbf{M}}(t)X = A^*(t)X + XA(t), \; \overline{\mathbf{M}}(t)X = \underline{\mathbf{M}}(t)X + \sum_{i=1}^{s} B^*(t)XB(t),$$

де $\trianglelefteq$ позначає нерівність, що породжується конусом ермітових невід'ємно визначених матриць $\mathcal{K}_n$. Оскільки $e^{\underline{\mathbf{M}}(\vartheta)\,\delta}X = e^{A^*(\vartheta)\,\delta}Xe^{A(\vartheta)\,\delta}$, то матричне диференціальне рівняння Ляпунова $\dot{\underline{X}} = A^*(t)\underline{X} + \underline{X}A(t)$ і кожна система (7.107) є позитивними щодо $\mathcal{K}_n$. Якщо система

$$\dot{\overline{X}} = A^*(t)\overline{X} + \overline{X}A(t) + \sum_{i=1}^{s} B^*(t)\overline{X}B(t) \qquad (7.108)$$

асимптотично стійка, то кожна система (7.107) є позитивною і асимптотично стійкою. Автономна система вигляду (7.108) асимптотично стійка, якщо сумісною є система матричних нерівностей

$$A^*X + XA + \sum_{i=1}^{s} B^*XB < 0, \quad X = X^* > 0.$$

Матричне диференціальне рівняння (7.108) відоме як рівняння других моментів стохастичної системи Іто (див. підрозд. 2.5). Це рівняння позитивне та монотонне щодо конуса $\mathcal{K}_n$.

7.7 Позитивна стабілізація динамічних систем

Встановлюючи умови стійкості станів динамічних систем, що мають властивості типу позитивності та монотонності, доцільно використовувати спеціальні методи дослідження (див. підрозд. 7.3). Такі властивості досліджуваних систем можна забезпечити за допомогою статичних або динамічних регуляторів.

Розглянемо систему керування:

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X, U, t), \quad Y = \mathbf{G}(X, U, t), \quad Z = \mathbf{H}(X, U, t), \qquad (7.109)$$

де $X \in \mathcal{X}$ — стан системи, $Y \in \mathcal{Y}$ — спостережуваний вихід, $Z \in \mathcal{Z}$— керований вихід, $U \in \mathcal{U}$ — керування, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ і $\mathbf{H}$ — неперервні оператор-функції, $t \geq 0$. Нехай $\mathbf{F}(0,0,t) \equiv 0$, $\mathbf{H}(0,0,t) \equiv 0$ і у просторі керованого виходу $\mathcal{Z}$ виділено конус $\mathcal{K}_t$.

Систему (7.109) називають *позитивно досяжною* щодо конуса $\mathcal{K}_t$, якщо існує регулятор

$$U = \mathbf{K}(Y, t), \qquad (7.110)$$

для якого $Z(t) \in \mathcal{K}_t$ при $Z(\tau) \in \mathcal{K}_\tau$ і $t > \tau \geq 0$. Якщо, крім того, $Z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то цю систему називають *позитивно стабілізовною* щодо конуса $\mathcal{K}_t$.

Аналогічно визначаються властивості позитивної досяжності та позитивної стабілізовності системи (7.109) за допомогою динамічного регулятора

$$\dot{R} = \mathbf{D}(R, Y, U, t), \quad U = \mathbf{K}(R, Y, t), \tag{7.111}$$

де $R \in \mathcal{R}$ — стан регулятора, $\mathbf{D}$ і $\mathbf{K}$ — оператор-функції, що підлягають визначенню. При цьому керований вихід Z може явно містити компоненти як стану системи, так і регулятора. Наприклад, якщо покласти $Z = \big[X, R\big]$, то конус $\mathcal{K}_t$ визначається у просторі $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{R}$.

Вивчаючи умови позитивної досяжності та позитивної стабілізовності класу систем

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X)X + \mathbf{B}(X)U, \quad Y = \mathbf{C}(X)X, \quad U = \mathbf{K}(X)Y, \tag{7.112}$$

можна скористатися наслідком 7.1 теореми 7.3. У цьому випадку простором керованих виходів системи $\mathcal{Z}$ є весь простір станів $\mathcal{X}$. Якщо $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ — тілесний конус і операторна нерівність

$$\mathbf{M}(X) = \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X)\mathbf{K}(X)\mathbf{C}(X) \trianglerighteq \alpha(X)\mathbf{I}, \quad X \in \partial\mathcal{K}, \tag{7.113}$$

має розв'язок $\mathbf{K}(X)$ для деякої функції $\alpha(X)$, то система (7.112) позитивно досяжна. Якщо при цьому система лінійних конусних нерівностей $\mathbf{M}(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0$ і $H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ сумісна, то стан $X \equiv 0$ замкненої системи (7.112) асимптотично стійкий.

Приклад 7.17 Розглянемо систему керування:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{7.114}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$ і $u \in \mathbb{R}^m$. Ця система позитивно досяжна щодо конуса $\mathbb{R}^n_+$ за допомогою статичного регулятора (3.3) тоді і лише тоді, коли сумісною є система нерівностей (див. приклад 7.1)

$$a_{ij} + b_{i*}Kc_{*j} \geq 0, \quad i \neq j, \tag{7.115}$$

де b_{i*} і c_{*j} — рядки і стовпці відповідних матриць B і C, $i,j=\overline{1,n}$. У разі виконання умов (7.115) замкнена система (7.114), (3.3) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли існує діагональна матриця $X>0$, що задовольняє матричну нерівність

$$(A+BKC)X + X(A+BKC)^\top < 0. \tag{7.116}$$

Обчислюючи матрицю K, можна скористатися одним із тверджень теореми 3.2. Так, якщо для деякої діагональної матриці $X>0$ виконуються співвідношення (3.35), то регулятор (3.3) з матрицею K, що задовольняє систему лінійних нерівностей (7.115) і (7.116), забезпечує позитивну стабілізацію системи (7.114).

Умовами позитивної стабілізації системи (7.114) щодо еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q)$ є система співвідношень

$$M^\top Q + QM + \alpha Q \geq 0,$$

$$M^\top QM \leq \beta Q, \quad h^\top M^{-1}h \leq 0, \quad h^\top (M^\top QM)^{-1}h \geq 0,$$

де $M=A+BKC$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$, h — власний вектор матриці Q, що відповідає її додатному власному значенню.

У задачі позитивної стабілізації системи (7.114) за допомогою динамічного регулятора (3.47) можна використати конуси типу $\mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$ і $\mathcal{K}_\sigma(\beta,q)$ (див. підрозд. 8.8), визначені у просторі замкненої системи

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} M & BU \\ VC & Z \end{bmatrix}, \quad \widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \tag{7.117}$$

де $M=A+BKC$. Зокрема, при $r=1$ замкнена система (7.117) у просторі $\mathbb{R}_+^{n+1}$ має інваріантний круговий конус Мінковського $\mathcal{K}_c = \{[x^\top,\xi]^\top : \|x\|_2 \leq \xi\}$, якщо [51, 52]

$$\begin{bmatrix} \gamma I_n - M - M^\top & C^\top V^\top - BU \\ VC - U^\top B^\top & 2Z-\gamma \end{bmatrix} \geq 0 \tag{7.118}$$

для деякого $\gamma\in\mathbb{R}$. Система (7.117) є позитивною щодо конуса $\mathcal{K}_\mu(1,\infty) = \{[x^\top,\xi]^\top : \max\limits_i |x_i| \leq \min\limits_j \xi_j\}$ тоді і лише тоді, коли виконуються співвідношення (див. приклад 7.11)

$$\begin{gathered}\sum_{i\neq k}|v_{s*}c_{*i}\mp m_{ki}|\leq\sum_j(z_{sj}\mp b_{k*}u_{*j})\pm v_{s*}c_{*k}\mp m_{kk},\\ z_{sj}\geq|b_{k*}u_{*j}|,\quad j\neq s,\quad k,i=\overline{1,n},\quad s,j=\overline{1,r}.\end{gathered}\tag{7.119}$$

Умовами позитивної стабілізації системи (7.114) щодо конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$ за допомогою регулятора (3.47) є об'єднання умов позитивності системи (7.117) та умов додатної оборотності блокової матриці $-\widehat{M}$, еквівалентних позитивності лінійної дискретної системи

$$\widehat{x}_{t+1}=\widehat{N}\widehat{x}_t,\quad \widehat{N}=-\widehat{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\widehat{A}&\widehat{B}\\ \widehat{C}&\widehat{D}\end{bmatrix}.\tag{7.120}$$

Блоки $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ і $\widehat{D}$ можна визначити за допомогою формули Фробеніуса для обернення блокових матриць.

У [5] отримано алгебричні критерії та достатні умови позитивності системи (7.120) щодо конусів $\mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$. Так, критерієм позитивності системи (7.120) щодо конуса $\mathcal{K}_\mu(1,\infty)$ є співвідношення

$$\widehat{d}_{kj}\geq|\widehat{b}_{sj}|,\quad \sum_{i=1}^n|\widehat{c}_{ki}\pm\widehat{a}_{si}|\leq\sum_{i=1}^r(\widehat{d}_{kj}\pm\widehat{b}_{sj}),\quad s=\overline{1,n},\ j,k=\overline{1,r}.\tag{7.121}$$

Отже, динамічний регулятор (3.47) забезпечує позитивну стабілізацію системи (7.114) щодо конуса $\mathcal{K}_\mu(1,\infty)$ тоді і лише тоді, коли виконується система співвідношень (7.119) і (7.121).

Зазначимо, що умови позитивної стабілізації системи (7.114) щодо конуса $\mathbb{R}_+^{n+r}$ за допомогою динамічного регулятора (3.47) повного порядку $r=n$ можна подати у вигляді системи ЛМН (див. підрозд. 3.2).

Розділ 8

Додаток

8.1 Ермітові матриці та закон інерції

Будь-яка *ермітова матриця* $X = X^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ має дійсний спектр $\sigma(X) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ і її можна подати у вигляді

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^* = PP^* - QQ^*, \tag{8.1}$$

де x_i — ортонормовані власні вектори, що відповідають власним значенням $\lambda_i \in \sigma(X)$, $P \in \mathbb{C}^{n\times p}$ і $Q \in \mathbb{C}^{n\times q}$ — матриці повного рангу за стовпцями.

Інерцію матриці $\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+(X), \mathrm{i}_-(X), \mathrm{i}_0(X)\}$ формують кількості її додатних ($\mathrm{i}_+(X)$), від'ємних ($\mathrm{i}_-(X)$) і нульових ($\mathrm{i}_0(X)$) власних значень з урахуванням кратностей. У розкладі (8.1) $\mathrm{i}(X) = \{p, q, n-p-q\}$ і $P^*Q = 0$. Невироджене *конгруентне перетворення* матриці зберігає її інерцію (*закон інерції Сільвестра*):

$$\mathrm{i}(X) = \mathrm{i}(T^*XT), \quad \det T \neq 0. \tag{8.2}$$

Ермітову матрицю X називають *додатно* (*невід'ємно*) *визначеною*, якщо *квадратична форма* $x^*Xx > 0$ ($x^*Xx \geq 0$) для будь-якого вектора $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. У цьому означенні для дійсної *симетричної матриці* $X = X^\top$ використовуються лише вектори $x \in \mathbb{R}^n$. Матриця X невід'ємно визначена тоді і лише тоді, коли в її розкладі (8.1) $Q = 0$. При цьому вона додатно визначена, якщо $p = n$.

Лема 8.1 *Нехай $X = PP^* - QQ^* \geq 0$, де $P \in \mathbb{C}^{n\times p}$ і $Q \in \mathbb{C}^{n\times q}$. Тоді $\operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} P$ і $Q = PC$ для деякої матриці $C \in \mathbb{C}^{p\times q}$. При цьому $CC^* \leq I_p$ ($CC^* < I_p$), якщо $\operatorname{rank} P = p$ ($\operatorname{rank} X = p$). Навпаки, якщо $Q = PC$ і $CC^* \leq I_p$ ($CC^* < I_p$), то $X \geq 0$ ($\mathrm{i}(X) = \{\operatorname{rank} P, 0, 0\}$).*

8.2 Блокові матриці та лема Шура

Наведемо важливі властивості блокових матриць вигляду

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

де A, B, C і D — блоки відповідних розмірів $n \times m$, $n \times k$, $k \times m$ і $k \times k$. У разі $\det D \neq 0$ маємо

$$M = \begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0_{k\times n} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0_{n\times k} \\ 0_{k\times m} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times k} \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix},$$

звідси при $m = n$ випливає $\det M = \det D \det E$, де $E = A - BD^{-1}C$. Якщо, крім того, $\det E \neq 0$, то обернена матриця обчислюється за *формулою Фробеніуса*:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CE^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CE^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

Аналогічна формула має місце у разі квадратного невиродженого діагонального блоку A [21].

Нехай матриця (8.3) є ермітовою, тобто $A = A^*$, $C = B^*$ і $D = D^*$. Якщо $\det A \neq 0$, то (див. формулу (1.12))

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(A) + \mathrm{i}_\pm(D - B^*A^{-1}B). \tag{8.5}$$

Аналогічно, якщо $\det D \neq 0$, то

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(D) + \mathrm{i}_\pm(A - BD^{-1}B^*). \tag{8.6}$$

Із формул (8.5) і (8.6) випливають критерії додатної та невід'ємної визначеності блокової матриці M.

Лема 8.2 (лема Шура). *Для блокової ермітової матриці* (8.3) *виконуються такі твердження:*

1) $M > 0 \iff A > 0,\ D > B^*A^{-1}B$;
2) $M > 0 \iff D > 0,\ A > BD^{-1}B^*$;
3) *якщо* $\det A \neq 0$, *то* $M \geq 0 \iff A > 0,\ D \geq B^*A^{-1}B$;
4) *якщо* $\det D \neq 0$, *то* $M \geq 0 \iff D > 0,\ A \geq BD^{-1}B^*$.

Лема 8.3 *Для заданих дійсних матриць $X > 0$, $Y > 0$ і числа $\gamma > 0$ існують матриці $X_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$ і $Y_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, що задовольняють співвідношення*

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^\top \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}, \tag{8.7}$$

тоді і лише тоді, коли

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{8.8}$$

Доведення. Із леми Шура і формули для рангу блокових матриць (1.9) випливає еквівалентність співвідношень (8.8) і

$$Z = Y - \gamma^2 X^{-1} \geq 0, \quad \operatorname{rank} Z \leq r. \tag{8.9}$$

Застосуємо формулу Фробеніуса (8.4) для обернення блокової матриці $\widehat{X}$ (8.7):

$$\frac{1}{\gamma^2}\begin{bmatrix} Y & Y_1^\top \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{-1} + X^{-1}X_1^\top H^{-1} X_1 X^{-1} & -X^{-1}X_1^\top H^{-1} \\ -H^{-1}X_1X^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix},$$

де $H = X_2 - X_1 X^{-1} X_1^\top$. Звідси отримаємо

$$Z = \gamma^2 X^{-1} X_1^\top H^{-1} X_1 X^{-1} \geq 0, \quad \operatorname{rank} Z = \operatorname{rank} X_1 \leq r,$$

тобто (8.9) є наслідком (8.7).

Покажемо, що (8.7) випливає із (8.9), використовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $Z = S^\top S$, де $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$ — довільна матриця така, що $\mathrm{Ker} S = \mathrm{Ker} Z$. Покладемо

$$X_1 = \frac{1}{\gamma} S X, \;\; X_2 = \frac{1}{\gamma^2} S X S^\top + I_r, \;\; Y_1 = -\gamma S, \;\; Y_2 = \gamma^2 I_r.$$

Тоді $H = I_r > 0$ і виконуються співвідношення (8.7). □

Лема 8.4 *Для довільної матриці $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, невироджених матриць $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і числа $\gamma > 0$ еквівалентними є такі твердження:*

1) *існують матриці* $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $X_3, Y_3 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, *для яких виконуються співвідношення*

$$\widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} \geq 0, \quad \widehat{E}\widehat{Y} = \widehat{Y}^\top \widehat{E}^\top \geq 0, \quad \widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}, \tag{8.10}$$

де

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix};$$

2) *виконуються співвідношення*

$$W = W^\top \geq 0, \quad \operatorname{rank} W = \rho + \delta, \quad \operatorname{rank} \Delta = \delta \leq r, \tag{8.11}$$

де

$$W = \begin{bmatrix} E^\top X & \gamma E^\top \\ \gamma E & EY \end{bmatrix}, \quad \Delta = \gamma^2 I_n - XY;$$

3) $EY = Y^\top E^\top \geq 0$ *і для деякої матриці* $\Theta = \Theta^\top \geq 0$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X - \Theta E & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \quad \operatorname{rank} \Theta \leq r; \tag{8.12}$$

4) $E^\top X = X^\top E \geq 0$ *і для деякої матриці* $\Lambda = \Lambda^\top \geq 0$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y - \Lambda E^\top \end{bmatrix} = n, \quad \operatorname{rank} \Lambda \leq r. \tag{8.13}$$

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Очевидно, що блокові матриці $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$ у співвідношеннях (8.10) повинні бути невиродженими. Запишемо ці співвідношення у вигляді

$$\begin{bmatrix} E^\top X & E^\top X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^\top E & X_1^\top \\ X_3^\top E & X_2^\top \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} EY & EY_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^\top E^\top & Y_1^\top \\ Y_3^\top E^\top & Y_2^\top \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$XY + X_3 Y_1 = \gamma^2 I_n, \quad XY_3 + X_3 Y_2 = 0,$$

$$X_1 Y + X_2 Y_1 = 0, \quad X_1 Y_3 + X_2 Y_2 = \gamma^2 I_r.$$

Використовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\widehat{E}^\top \widehat{X} = L^\top L \geq 0$, маємо

$$\left[\, X_1, X_2 \,\right] = L_2^\top L, \quad \operatorname{rank} \left[\, X_1, X_2 \,\right] = r \leq \operatorname{rank} L_2 = \operatorname{rank} X_2,$$

де $L = \left[\, L_1, L_2 \,\right]$ і $X_2 = L_2^\top L_2$. Отже, $X_2 = X_2^\top > 0$ і $\operatorname{rank} Y = n$, оскільки $(X - X_3 X_2^{-1} X_1)\, Y = \gamma^2 I_n$. Аналогічно, $Y_2 = Y_2^\top > 0$ і $\operatorname{rank} X = n$. Отже, всі діагональні блоки матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$ у (8.10) є невиродженими.

Застосовуючи формулу Фробеніуса для оберненої матриці $\widehat{Y}^{-1}$, одержуємо співвідношення

$$\begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1} Y_3 Y_2^{-1} \\ -Y_2^{-1} Y_1 H^{-1} & Y_2^{-1} + Y_2^{-1} Y_1 H^{-1} Y_3 Y_2^{-1} \end{bmatrix},$$

де $H = Y - Y_3 Y_2^{-1} Y_1$. Далі використовуємо конгруентне перетворення блокової матриці

$$T^\top W T = \begin{bmatrix} E^\top X & 0 \\ 0 & \Xi \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I_n & -\gamma X^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad \det T \neq 0,$$

де $E^\top X = X^\top E \geq 0$ і $\Xi = E(Y - \gamma^2 X^{-1}) = Y_1^\top Y_2^{-1} Y_1 \geq 0$. Отже, $W = W^\top \geq 0$. Крім того, в (8.11) виконуються рангові обмеження, оскільки $\Xi = -E X^{-1} \Delta$, $\Delta = X_3 Y_1$ і

$$\operatorname{rank} E^\top X = \rho, \ \operatorname{rank} Y_1 \leq r, \ \operatorname{rank} \Delta \leq \operatorname{rank} Y_1 = \operatorname{rank} \Xi \leq \operatorname{rank} \Delta.$$

$2 \Rightarrow 1$. Нехай виконуються співвідношення (8.11). Якщо $\delta = 0$, то в (8.10) можна покласти $X_1 = 0$, $X_2 = \gamma^2 I_r$, $X_3 = 0$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = I_r$ і $Y_3 = 0$.

Нехай $\delta \neq 0$. Покладемо $Y_2 = I_r$ і $Y_1^\top = \left[\, V^\top, 0_{n \times r - \delta} \,\right] \in \mathbb{R}^{n \times r}$, де $V \in \mathbb{R}^{\delta \times n}$ — множник повного рангу $\delta \leq r$ у розкладі невід'ємно визначеної матриці $\Xi = V^\top V$. Тоді існує матриця $U \in \mathbb{R}^{n \times \delta}$ така, що $\Delta = UV$, оскільки

$$\operatorname{rank} V \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} = \operatorname{rank} (V^\top V + \Delta^\top \Delta) = \operatorname{rank} \left[(\Delta^\top - E X^{-1}) \Delta \right] \leq$$

$$\leq \operatorname{rank} \Delta = \operatorname{rank} \Xi = \operatorname{rank} V = \delta, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} = \operatorname{rank} V.$$

При цьому $-EX^{-1}UV = \Xi = V^\top V$ і $V^\top = -EX^{-1}U$.

Нехай тепер $Y_3 = -\left[\, X^{-1}U, 0_{n\times r-\delta} \,\right]$, тоді $Y_3Y_1 = Y - \gamma^2 X^{-1}$, $EY - EY_3Y_1 = \gamma^2 EX^{-1} \geq 0$ і згідно з лемою Шура справджується друга матрична нерівність в (8.10). Для виконання матричної рівності в (8.10) можна покласти

$$X_1 = -Y_1X, \quad X_2 = \gamma^2 I_r + Y_1XY_3, \quad X_3 = -XY_3. \tag{8.14}$$

При цьому $H = \gamma^2 X^{-1}$ і перша матрична нерівність в (8.10) є наслідком другої.

$1 \Rightarrow 3$. Нехай виконується твердження 1. Поклавши $\Theta = X_3X_2^{-1}X_3^\top \geq 0$ і врахувавши співвідношення $X_1 = X_3^\top E$, $X_2 = X_2^\top > 0$, $XY + X_3Y_1 = \gamma^2 I_n$ і $X_1Y + X_2Y_1 = 0$, отримаємо рівність $X - \Theta E = \gamma^2 Y^{-1}$, яка еквівалентна ранговій умові в (8.12). При цьому $EY = Y^\top E^\top \geq 0$ і $\operatorname{rank}\Theta \leq r$.

$3 \Rightarrow 2$. За умов (8.12) матриця $\Delta = -\Theta EY$, причому $E^\top X = X^\top E \geq 0$, якщо $EY = Y^\top E^\top \geq 0$. Застосовуючи конгруентне перетворення

$$T^\top WT = \begin{bmatrix} EY & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & -\gamma Y^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det T \neq 0,$$

де $\Gamma = E^\top(X - \gamma^2 Y^{-1}) = E^\top \Theta E \geq 0$ і розклад невід'ємно визначеної матриці $\Theta = \Theta_0^\top \Theta_0$, отримаємо

$$\delta = \operatorname{rank}\Delta \leq \operatorname{rank}(\Theta_0 E) = \operatorname{rank}\Gamma \leq \delta,$$

тобто $\operatorname{rank}\Gamma = \delta$, $\operatorname{rank} W = \rho + \delta$ і $\delta \leq \operatorname{rank}\Theta \leq r$.

Аналогічно доводиться, що твердження 2 випливає із твердження 4, а твердження 4 випливає із твердження 1. При цьому $\Lambda = Y_3Y_2^{-1}Y_3^\top$, $Y_1 = Y_3^\top E^\top$, $Y_2 = Y_2^\top > 0$ і $\operatorname{rank}\Lambda \leq r$. $\square$

8.3 Умови сумісності матричних нерівностей

Ядро ker A матриці $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ утворює підпростір розв'язків однорідної системи $Ax = 0$. Матрицю розміру $n \times (n - \operatorname{rank} A)$, стовпці якої утворюють базис ядра ker A, позначаємо через W_A. Якщо $\operatorname{rank} A = p < n$, то W_A збігається з транспонованою матрицею ортогонального доповнення $A^{\perp\top}$.

Лема 8.5 (лема Фінслера). *Нехай* $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *і* $\operatorname{rank} B < n$. *Тоді такі твердження є еквівалентними:*

(a) $x^\top A x < 0 \;\; \forall x \neq 0,\ x \in \ker \mathrm{B}$;

(b) $A < \alpha B^\top B$ *для деякого* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $W_B^\top A W_B < 0$;

(d) $A < B^\top X + X^\top B$ *для деякої матриці* $X \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Лема 8.6 *Для заданих матриць* $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *і* $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ *лінійна матрична нерівність*

$$A + B^\top X C + C^\top X^\top B < 0 \tag{8.15}$$

має розв'язок $X \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли виконується одна із умов:*

(a) $\operatorname{rank} B = n$, $\operatorname{rank} C = n$;

(b) $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} C = n$, $W_B^\top A W_B < 0$;

(c) $\operatorname{rank} B = n$, $\operatorname{rank} C < n$, $W_C^\top A W_C < 0$;

(d) $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} C < n$, $W_B^\top A W_B < 0$, $W_C^\top A W_C < 0$.

У [12] за умов леми 8.6 наведено загальний розв'язок матричної нерівності (8.15) в параметричній формі.

Із леми 8.5, зокрема, випливає, що умови (d) сумісності матричної нерівності (8.15) еквівалентні співвідношенням $A < \alpha B^\top B$ і $A < \alpha C^\top C$ за деякого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Розглянемо квадратичну матричну нерівність:

$$A + B^\top X C + C^\top X^\top B + C^\top X^\top R X C < 0, \tag{8.16}$$

де $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $C \neq 0 \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ і $R = R^\top \geq 0$.

Лема 8.7 *Матрична нерівність* (8.16) *має розв'язок* $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли*

(a) $\operatorname{rank} C = n$ *або* (b) $\operatorname{rank} C < n$, $W_C^\top A W_C < 0$

і виконуються одна із наступних умов:

(c) $R = 0$, $\operatorname{rank} B = n$;

(d) $R = 0$, $\operatorname{rank} B < n$, $W_B^\top A W_B < 0$;

(e) $R > 0$, $A < B^\top R^{-1} B$;

(f) $1 \le \operatorname{rank} R < p$, $\operatorname{rank} B_0 = n$;

(g) $1 \le \operatorname{rank} R < p$, $\operatorname{rank} B_0 < n$, $W_{B_0}^\top \big(A - B^\top R^+ B\big) W_{B_0} < 0$;

де $B_0 = W_R^\top B$, R^+ *— псевдообернена матриця.*

Доведення. У випадку $R = 0$ твердження лем 8.6 і 8.7 збігаються. Використаємо розклад невід'ємно визначеної матриці $R = LL^\top$, де $\operatorname{rank} L = \operatorname{rank} R = r \neq 0$, $L \in \mathbb{R}^{p \times r}$ і, не обмежуючи загальності, шукаємо розв'язок нерівності (8.16) у вигляді

$$X = L^{+\top} X_1 + L^\perp X_2, \;\; L^+ = (L^\top L)^{-1} L^\top, \;\; L^\perp = W_R \in \mathbb{R}^{p \times p-r},$$

де $X_1 \in \mathbb{R}^{r \times q}$ і $X_2 \in \mathbb{R}^{p-r \times q}$ — невідомі матриці (у разі $r = p$ вважаємо $W_R = 0$). Враховуючи рівність $X^\top R X = X_1^\top X_1$ та лему Шура, отримаємо ЛМН щодо X_1:

$$\widehat{A} + \widehat{B}^\top X_1 \widehat{C} + \widehat{C}^\top X_1^\top \widehat{B} < 0, \tag{8.17}$$

де

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B_1, & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{bmatrix} C, & 0_{q \times r} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = A + B_0^\top X_2 C + C^\top X_2^\top B_0, \quad B_0 = W_R^\top B, \quad B_1 = L^+ B.$$

Відповідно до умови (d) леми 8.6 критерієм сумісності нерівності (8.17) щодо X_1 є співвідношення

$$W_{\widehat{B}}^\top \widehat{A} W_{\widehat{B}} < 0, \quad W_{\widehat{C}}^\top \widehat{A} W_{\widehat{C}} < 0.$$

Враховуючи що

$$W_{\widehat{B}} = \begin{bmatrix} I_n \\ -B_1 \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{C}} = \begin{bmatrix} W_C & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}, \quad B_1^\top B_1 = B^\top R^+ B,$$

запишемо дані співвідношення у вигляді

$$A - B^\top R^+ B + B_0^\top X_2 C + C^\top X_2^\top B_0 < 0, \quad W_C^\top A W_C < 0. \tag{8.18}$$

Далі, знову застосовуючи лему 8.6 до першої нерівності в (8.18) щодо X_2, отримуємо всі наведені умови сумісності вихідної матричної нерівності (8.16) щодо X. Зокрема, при $r = p$ критерієм розв'язності нерівності (8.16) є одна з умов (a) або (b) та умова (e). □

Лема 8.8 *Позначимо симетричні блокові матриці*

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^\top & S_3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix},$$

де $S_1, H_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $S_2, H_2 \in \mathbb{R}^{r\times d}$, $S_3, H_3 \in \mathbb{R}^{d\times d}$. *Якщо задані* $H > 0$ *і* $0 < S_1 < H_1$, *то існують блоки* S_2 *і* S_3 *матриці* S, *за яких* $0 < S < H$.

Доведення. Запишемо співвідношення $0 < S < H$ на підставі леми Шура у вигляді

$$0 < S_1 < H_1, \quad S_2^\top S_1^{-1} S_2 < S_3 < H_3 + (S_2 - H_2)^\top (S_1 - H_1)^{-1} (S_2 - H_2).$$

Очевидно, що блок S_3 можна визначити, якщо

$$S_2^\top S_1^{-1} S_2 + (S_2 - H_2)^\top (H_1 - S_1)^{-1} (S_2 - H_2) < H_3,$$

тобто

$$\begin{bmatrix} -S_1 & 0 & S_2 \\ 0 & S_1 - H_1 & S_2 - H_2 \\ S_2^\top & S_2^\top - H_2^\top & -H_3 \end{bmatrix} < 0.$$

Подамо останню нерівність стосовно $X = S_2$ у вигляді (8.15), де

$$A = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 - H_1 & -H_2 \\ 0 & -H_2^\top & -H_3 \end{bmatrix}, \quad B^\top = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_d \end{bmatrix}.$$

Критерій її сумісності за лемою 8.6 збігається з наведеними умовами, оскільки

$$W_B^\top A W_B = -H < 0, \quad W_C^\top A W_C = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & S_1 - H_1 \end{bmatrix} < 0,$$

де

$$W_B = \begin{bmatrix} -I_r & 0 \\ I_r & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}, \quad W_C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

8.4 Леми про матричну невизначеність

Сформулюємо відоме твердження, яке назвали *лемою Пітерсена* про матричну невизначеність [141] (див. також [91]).

Лема 8.9 (лема Пітерсена [141]). *Для будь-якої матриці $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ з обмеженою нормою $\|K\| = \sqrt{\lambda_{\max}(K^\top K)} \le 1$ виконується матрична нерівність $W + U^\top KV + V^\top K^\top U \le 0$ тоді і лише тоді, коли існує таке $\varepsilon > 0$, що $W + \varepsilon U^\top U + \varepsilon^{-1}V^\top V \le 0$, де $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{l\times n}$ і $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

Введемо на множині матриць $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \ne 0\}$ нелінійні оператори $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ і

$$\mathbf{F}(K)=W + U^\top\mathbf{D}(K)V + V^\top\mathbf{D}^\top(K)U + V^\top\mathbf{D}^\top(K)\,R\,\mathbf{D}(K)V, \tag{8.19}$$

де $W = W^\top \le 0$, $R = R^\top \ge 0$, U, V і D — матриці відповідних розмірів, та сформулюємо узагальнену *лему про матричну невизначеність*.

Лема 8.10 *Нехай виконуються матричні нерівності*

$$\Delta < 0, \quad \Omega = \begin{bmatrix} W & U^\top & V^\top \\ U & R-P & D^\top \\ V & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0 \ (< 0), \tag{8.20}$$

де $\Delta = D^\top QD + R - P$. Тоді $\mathbf{F}(K) \le 0$ (< 0) для будь-якої матриці $K \in \mathcal{K}$ із еліпсоїда $\mathcal{K} = \{K : K^\top PK \le Q\}$.

Доведення. Нехай $K \in \mathcal{K}$. Оскільки

$$D^\top K^\top PKD \le D^\top QD \le D^\top QD + R < P,$$

то $\rho(KD) < 1$, $K \in \mathcal{K}_D$ і визначено значення оператора $\mathbf{D}(K)$.

Застосуємо формулу Фробеніуса для обернення блокової матриці

$$\begin{bmatrix} R-P & D^\top \\ D & -Q^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1}D^\top Q \\ QD\Delta^{-1} & QD\Delta^{-1}D^\top Q - Q \end{bmatrix}$$

і подамо матричну нерівність $\Omega \leq 0$ у вигляді

$$\left[U^\top, V^\top\right] \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1} D^\top Q \\ QD\Delta^{-1} & QD\Delta^{-1}D^\top Q - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \geq W. \tag{8.21}$$

Тут використано також лему Шура 8.2. Враховуючи (8.21), бачимо, що матрична нерівність $\mathbf{F}(K) \leq 0$, подана у вигляді

$$\left[U^\top, V^\top\right] \begin{bmatrix} 0 & -\Theta \\ -\Theta^\top & -\Theta^\top R\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \geq W, \quad \Theta = \mathbf{D}(K),$$

виконується, якщо

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Theta + \Delta^{-1}D^\top Q \\ \Theta^\top + QD\Delta^{-1} & \Theta^\top R\Theta + QD\Delta^{-1}D^\top Q - Q \end{bmatrix} \leq 0.$$

Застосовуючи до цього виразу лему Шура у разі невиродженості першого діагонального блока, отримаємо

$$\Theta^\top R\Theta + QD\Delta^{-1}D^\top Q - Q - (\Theta^\top + QD\Delta^{-1})\Delta(\Theta + \Delta^{-1}D^\top Q) =$$
$$= \Theta^\top P\Theta - Q - \Theta^\top D^\top QD\Theta - QD\Theta - \Theta^\top D^\top Q =$$
$$= \Theta^\top P\Theta - (I_l + \Theta^\top D^\top)Q(I_l + D\Theta) \leq 0.$$

Остання нерівність з урахуванням властивостей (3.41) оператора $\mathbf{D}(K)$ і закону інерції набуває вигляду $K^\top PK \leq Q$, тобто $K \in \mathcal{K}$.

Припущення $\Omega < 0$ в (8.20) забезпечує виконання строгої нерівності $\mathbf{F}(K) < 0$ для будь-якої матриці $K \in \mathcal{K}$. □

Зазначимо, що лема 8.10 є узагальненням твердження достатності в лемі Пітерсена (лема 8.9). Щоб переконатися в цьому, можна покласти $D = 0$, $R = 0$, $P = \varepsilon^{-1} I_m$ і $Q = \varepsilon^{-1} I_l$. При цьому $\|K\| \leq 1 \Leftrightarrow K^\top K \leq I_l$.

Зауваження 8.1 Друге співвідношення в (8.20) на підставі леми Шура можна подати в еквівалентній формі:

$$\begin{bmatrix} W + V^\top QV & U^\top + V^\top QD \\ U + D^\top QV & R + D^\top QD - P \end{bmatrix} \leq 0\,(< 0)$$

або

$$\Phi = W + V^\top QV - (U^\top + V^\top QD)\Delta^{-1}(U + D^\top QV) \leq 0\,(< 0).$$

При цьому перша умова в (8.20) є наслідком строгої нерівності $\Omega < 0$ і виконується оцінка

$$\mathbf{F}(K) \le \Phi, \quad K \in \mathcal{K}. \tag{8.22}$$

Ця оцінка є наслідком співвідношень $\Delta < 0$ і

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(K) - \Phi = V^\top \big[\Theta^\top P \Theta - (I_l + \Theta^\top D^\top) Q (I_l + D\Theta)\big] V + \\ + \big(U^\top + V^\top \Theta^\top \Delta + V^\top Q D\big) \Delta^{-1} \big(U + \Delta \Theta V + D^\top Q V\big) \le 0,\end{aligned}$$

причому $K \in \mathcal{K} \iff \Theta^\top P \Theta \le (I_l + \Theta^\top D^\top) Q (I_l + D\Theta)$, де $\Theta = \mathbf{D}(K)$. Для деякої матриці $K = K_0 \in \mathcal{K}$ у (8.22) досягається рівність, якщо

$$K_0(V + DG) = G, \quad G^\top P G = (V^\top + G^\top D^\top) Q (V + DG),$$

де $G = -\Delta^{-1}(U + D^\top Q V)$. Зокрема, якщо $K_0^\top P K_0 = Q$ і $K_0(V + DG) = G$, то $\mathbf{F}(K_0) = \Phi$. Якщо така матриця K_0 існує і $\Delta < 0$, то співвідношення $\Omega \le 0\,(< 0)$ і $\mathbf{F}(K) \le 0$ (< 0) $\forall K \in \mathcal{K}$ у лемі 8.10 еквівалентні.

8.5 Канонічна форма лінійної в'язки матриць

Довільну лінійну в'язку матриць $L(\lambda) = A - \lambda B$ розміру $n \times m$ за допомогою еквівалентних перетворень можна звести до *канонічної форми Кронекера* [21]:

$$PL(\lambda)Q = \left[\begin{array}{cc|ccc} J - \lambda I_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_r - \lambda N & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & U(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{h\times g} \end{array}\right], \tag{8.23}$$

де P і Q — квадратні невироджені матриці відповідних розмірів $n \times n$ і $m \times m$. Можна вважати, що матриця J, яка відповідає *скінченним елементарним дільникам* $L(\lambda)$, має нормальну жорданову форму. За наявності *нескінченних елементарних дільників* $L(\lambda)$, степені яких $\nu_1, \ldots, \nu_\tau$, у (8.23) є другий діагональний блок порядку $r = \nu_1 + \cdots + \nu_\tau$. При цьому квазідіагональна матриця N є *нільпотентною* з індексом нільпотентності $\nu = \max_i \nu_i$ і її діагональні блоки мають таку структуру:

$$N_i = \begin{cases} 0, & \nu_i = 1, \\ \left[\begin{array}{c|c} 0_{\nu_i - 1\times 1} & I_{\nu_i - 1} \\ \hline 0 & 0_{1\times \nu_i - 1} \end{array}\right] & \nu_i \geq 2, \end{cases} \quad (i = \overline{1, \tau}),$$

Якщо в'язка $L(\lambda)$ є *сингулярною* ($\det L(\lambda) \equiv 0$ або $n \neq m$), то в (8.23) є діагональні блоки $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ або $0_{h\times g}$. Діагональні блоки квазідіагональних матриць $U(\lambda)$ і $V(\lambda)$ є такими:

$$U_i(\lambda) = \left[\, 0_{k_i\times 1}, I_{k_i} \,\right] - \lambda \left[\, I_{k_i}, 0_{k_i\times 1} \,\right], \quad i = \overline{1, \xi},$$

$$V_j(\lambda) = \left[\, 0_{s_j\times 1}, I_{s_j} \,\right]^\top - \lambda \left[\, I_{s_j}, 0_{s_j\times 1} \,\right]^\top, \quad j = \overline{1, \eta},$$

де k_i і s_j — ненульові *мінімальні індекси* відповідно для стовпців та рядків $L(\lambda)$. Розмір нульового діагонального блоку $0_{h\times g}$ визначається кількістю нульових мінімальних індексів відповідно для рядків (h) і стовпців (g) в'язки $L(\lambda)$. Розміри нульових позадіагональних блоків (8.23) повинні відповідати розмірам діагональних блоків.

8.6 Функції від матриці

Нехай $f(\lambda)$ — аналітична функція на замкненій множині, обмеженій замкненим контуром ω. Визначимо $f(A)$ як матричний інтеграл:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega f(\lambda)(\lambda I_n - A)^{-1} d\lambda. \tag{8.24}$$

Використовуючи розклад *резольвенти*

$$(\lambda I_n - A)^{-1} = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti}$$

та інтегральні формули Коші для похідних функції $f(\lambda)$, маємо

$$f(A) = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} f^{(i-1)}(\lambda_t) A_{ti}, \tag{8.25}$$

де A_{ti} — *компоненти матриці* A, $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ — всі попарно різні точки спектра $\sigma(A)$, що є коренями відповідних кратностей $m_1, \dots, m_\alpha$ *мінімального полінома*

$$\theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_\alpha)^{m_\alpha}$$

матриці A степеня $m = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} m_t \leq n$. Якщо функція $f(\lambda)$ у крузі $\mathcal{S}(z, r) = \{\lambda : |\lambda - z| < r\}$ подана збіжним степеневим рядом

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - z)^k,$$

то для будь-якої матриці A зі спектром $\sigma(A) \subset \mathcal{S}(z, r)$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - zI_n)^k.$$

Часто використовуються такі функції від матриці:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \ \sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \ \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k},$$

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k, \sigma(A) \subset \mathcal{S}(0, 1).$$

Зазначимо важливі властивості функцій від матриці:

- Якщо $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, то $\sigma\big(f(A)\big) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}$.
- Якщо $B = T^{-1}AT$, то $f(B) = T^{-1}f(A)T$.
- Якщо $A = \operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_p\}$ — квазідіагональна матриця, то $f(A) = \operatorname{diag}\{f(A_1), \dots, f(A_p)\}$ теж є квазідіагональною.

Будь-яку квадратну матрицю A можна звести до *жорданової канонічної форми* за допомогою *перетворення подібності*

$T^{-1}AT = \operatorname{diag}\{J_1, \dots, J_p\}$, де

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \ \lambda_i \in \sigma(A), J_i \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i}, i = \overline{1,p}.$$

Тут серед власних значень λ_i можуть бути рівні, причому $J_i = \lambda_i$, якщо λ_i — просте власне значення, алгебрична та геометрична кратності якого збігаються ($n_i = \xi_i$). Для матриці A простої структури канонічна форма є діагональною, а мінімальний поліном не має кратних коренів.

Обчислюючи компоненти матриць J_i, згідно з (8.25) одержуємо

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \dfrac{f^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \dots & \dfrac{f^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \dots & \dfrac{f^{(p_i-2)}(\lambda_i)}{(p_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,p},$$

$$f(A) = T \operatorname{diag}\{f(J_1), \dots, f(J_p)\}\, T^{-1}.$$

8.7 Векторні, матричні та операторні норми

Норму елементів у просторі $\mathcal{X}$ визначає функціонал $f(X) = \|X\| \geq 0$, що має такі властивості:

1) $\|X\| = 0 \iff X = 0$;
2) $\|X_1 + X_2\| \leq \|X_1\| + \|X_2\| \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{X}$;
3) $\|cX\| = |c|\|X\| \quad \forall c \in \mathbb{C}, \forall X \in \mathcal{X}$.

Для матричних норм разом з 1—3 виконується властивість:

4) $\|X_1X_2\| \leq \|X_1\|\|X_2\| \quad \forall X_1 \in \mathbb{C}^{p\times n}, \forall X_2 \in \mathbb{C}^{n\times q}$.

Матрична норма в $\mathbb{C}^{m\times n}$ *узгоджена* з векторними нормами в $\mathbb{C}^n$ і $\mathbb{C}^m$, якщо $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \ \ \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ і $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

Норму лінійного оператора $\mathbf{A}$, що діє з нормованого простору $\mathcal{X}_1$ у нормований простір $\mathcal{X}_2$, визначають у вигляді

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|.$$

Для операторних норм виконуються наведені вище властивості 1—4 векторних та матричних норм. Норма та спектральний радіус оператора задовольняють співвідношення (І. М. Гельфанд)

$$\rho(\mathbf{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathbf{A}^n\|}, \quad \rho(\mathbf{A}) \le \sqrt[n]{\|\mathbf{A}^n\|}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для норми матриці як лінійного оператора використовуються терміни *операторна*, *підпорядкована* або *індукована* матрична норма. Серед усіх матричних норм, узгоджених із заданими векторними нормами, підпорядкована норма є мінімальною.

У просторі $\mathbb{C}^n$ застосовуються векторні l_p-норми ($p = 1, 2, \ldots, \infty$):

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|,$$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad p \ge 1 \quad \text{(норма Гельдера)}.$$

Найпоширенішими матричними нормами є:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(стовпцева норма)},$$

$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \qquad \text{(спектральна норма)},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(рядкова норма)},$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)} \qquad \text{(евклідова норма)}.$$

Стовпцева, спектральна і рядкова норми матриць є підпорядкованими відносно відповідно l_1-, l_2- і l_∞-норм векторів.

Аналогами векторних l_p-норм у просторі неперервних функцій $\mathbb{C}[a,b]$ є L_p-норми:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p\Big)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

У гільбертовому просторі $\mathcal{X}$ скалярний добуток породжує *природну* норму $\|X\| = \sqrt{(X,X)}$, $X \in \mathcal{X}$. Наприклад, у просторі матриць $\mathbb{C}^{n\times n}$ скалярний добуток $(A,B) = \operatorname{tr}(A^*B)$ породжує евклідову норму матриці.

8.8 Конуси у векторних та матричних просторах

Замкнену опуклу множину $\mathcal{K}$ дійсного простору називають конусом, якщо виконуються такі умови: $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ $\forall\alpha,\beta \geq 0$ і $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$. Наведемо приклади конусів у просторах векторів і матриць, що мають властивості нормальності та тілесності.

1. Найпростішим і найбільш використовуваним конусом у просторі $\mathbb{R}^n$ є множина невід'ємних векторів

$$\mathbb{R}^n_+ = \big\{x : x = [\,x_1,\ldots,x_n\,]^\top,\, x_i \geq 0,\, i = \overline{1,n}\big\}.$$

Цей конус є нормальним, відтворювальним та тілесним. Спряжений конус утворюють лінійні функціонали $\varphi(x) = y^\top x$ при $y \in \mathbb{R}^n_+$.

2. Конусом у просторі $\mathbb{R}^{n\times m}$ є множина невід'ємних матриць

$$\mathbb{R}^{n\times m}_+ = \big\{X :\, X = \|x_{ij}\|^{n,m}_{i,j=1},\, x_{ij} \geq 0,\, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\big\}.$$

Спряженим конусом є множина лінійних функціоналів $\varphi(X) = \operatorname{tr}(Y^\top X)$ при $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$.

3. Конусом у дійсному просторі ермітових матриць $\mathcal{H}_n$ є множина невід'ємно визначених матриць

$$\mathcal{K}_n = \big\{X :\, X = X^* \geq 0\big\}.$$

Спряжений конус $\mathcal{K}^*_n$ утворюють лінійні функціонали $\varphi(X) = \operatorname{tr}(YX)$ при $Y \in \mathcal{K}_n$.

Підмножина дійсних симетричних матриць у $\mathcal{K}_n$ також є конусом, а його спряжений конус складається з дійсних функціоналів $\varphi(X) = \mathrm{tr}(YX)$ при $Y = Y^\top \geq 0$.

4. *Еліпсоїдальний конус* у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ визначають у вигляді $\mathcal{K}(Q) = \{z : z^\top Qz \geq 0,\ z^\top h \geq 0\}$, де h — власний вектор матриці $Q = Q^\top$ з інерцією $\mathrm{i}(Q) = \{1, n, 0\}$, що відповідає її додатному власному значенню [7, 145]. Спряжений конус $\mathcal{K}^*(Q)$ складається з лінійних функціоналів $\varphi(z) = w^\top Qz$ при $w \in \mathcal{K}(Q)$.

Якщо

$$Q = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

то множина $\mathcal{K}(Q)$ є *круговим конусом Мінковського* [23]:

$$\mathcal{K}_c = \{z : z = [\,x^\top, u\,]^\top,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 \leq u\}.$$

Якщо $Q = hh^\top - I_{n+1}$, де $\|h\|_2 > 1$, то $\mathcal{K}(Q)$ збігається з *світловим конусом* $\mathcal{K}_h = \{z : \|z\|_2 \leq h^\top z\}$.

5. Конусами у просторі $\mathbb{R}^{n+m}$ є множини [7]

$$\mathcal{K}_\mu(\alpha, p) = \left\{z : z = \left[\,x^\top, u^\top\,\right]^\top,\ u \in \mathbb{R}^m_+,\ \|x\|_p \leq \mu_\alpha(u)\right\},$$

$$\mathcal{K}_\sigma(\beta, q) = \left\{w : w = \left[\,y^\top, v^\top\,\right]^\top,\ v \in \mathbb{R}^m_+,\ \|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)\right\},$$

де $\mu_\alpha(u) = \alpha \min\limits_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum\limits_k v_k$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\|\cdot\|_p$ і $\|\cdot\|_q$ — будь-які гельдерівські норми.

Множини $\mathcal{K}_\mu(1, 2)$ і $\mathcal{K}_\sigma(1, 2)$ при $m = 1$ збігаються з круговим конусом Мінковського. За умов

$$\alpha\beta = 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1,$$

спряжені конуси $\mathcal{K}^*_\mu(\alpha, p)$ і $\mathcal{K}^*_\sigma(\beta, q)$ утворюють відповідні множини лінійних функціоналів $\varphi(z) = w^\top z$ при $w \in \mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$ і $\varphi(w) = z^\top w$ при $z \in \mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$. Це означає, що $\mathcal{K}^*_\mu(\alpha, p) = \mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$ і $\mathcal{K}^*_\sigma(\beta, q) = \mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$.

Коментарі та бібліографічні вказівки

Розділ 1. Загальну теорію матричних рівнянь і нерівностей, що включає в себе методи побудови аналогів рівняння Ляпунова, викладено в підрозд. 1.1—1.4 на базі попередніх книг автора [49,60,131], що містять обґрунтування всіх тверджень та необхідні бібліографічні джерела. Методи дослідження матричних нерівностей з невизначеними коефіцієнтами та їх зведення до скінченних систем матричних нерівностей (підрозд. 1.5) отримано в [61,71,78]. Методи локалізації власних значень матричних поліномів і функцій (підрозд. 1.6) отримано в [55, 56, 133]. Результати підрозд. 1.7 одержано в [58]. Застосування функцій сліду матриці дає змогу зменшити обсяг обчислень, необхідних для реалізації розроблених методів матричних нерівностей.

Розділ 2. У ході викладання основних понять та тверджень про стійкість розв'язків лінійних та нелінійних систем використано праці [10, 15, 27, 37, 45, 79, 114, 127]. У підрозд. 2.1 наведено наслідки загальних теорем про стійкість для класів псевдолінійних систем, а також систем, не розв'язаних відносно похідних. Методи функцій Ляпунова успішно застосовуються в різних задачах аналізу та синтезу динамічних систем (див., наприклад, [2, 19, 29, 32, 41, 60, 84, 89, 90, 93, 94, 116, 129]). Коефіцієнтні критерії та достатні умови стійкості лінійних диференціальних систем другого порядку (підрозд. 2.3) отримано в [4, 8]; у разі невизначених коефіцієнтів використано працю [78]. Теорема 2.15 є наслідком загальніших результатів [48]. Метод структурних перетворень [34] дає змогу спростити застосування відомих теорем про стійкість для диференціальних систем другого порядку. Системи такого класу виникають, зокрема, під час моделювання динамічних об'єктів на базі варіаційних принципів механіки (див., наприклад, [22, 44]). Теорема 2.20 про робастну абсолютну стійкість лінійних систем із запізненням та теорема 2.22 про робастну стійкість у середньоквадратичному стохастичних систем типу Іто сформульовані в [78] на підставі леми 1.21 та відповідних тверджень із [32, 33]. Умови асимптотичної стійкості (теорема 2.23) та стабілізації (теорема 2.24) лінійних систем, що випливають із результатів підрозд. 1.7, сформульовано в [58].

Розділ 3. У теоремі 3.1 наведено відомі критерії стабілізовності за станом лінійних систем (див., наприклад, [3, 11, 42, 86]). Проблеми чисельної реалізації відомих методів стабілізації за виходом лінійних систем, що випливають з теореми 3.2, у загальному випадку мало вивчені [87]. Твердження леми 3.1, критерії стабілізовності 2 і 3 у теоремі 3.2, а також алгоритми стабілізації за виходом, що випливають з теореми 3.3, є новими [59,64,70]. Доведення критеріїв 4—6 теореми 3.2 є у відповідних працях [102, 107, 126]. У підрозд. 3.1 сформульовано також критерій стабілізовності за виходом на основі загальної канонічної декомпозиції Калмана [30, 150, 155]. Алгоритм побудови стабілізовного динамічного регулятора на підставі теореми 3.4 запропоновано в [64]. Теорема 3.5 дає умови стабілізації за виходом на базі спостерігача повного порядку (див. також [12, 24, 86]). Узагальнену лему про матричну невизначеність (лема 8.10), на якій ґрунтуються запропоновані методи робастної стабілізації та оптимізації систем, встановлено в [57]. Теореми 3.6 і 3.8 є наслідками леми 8.10 та теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Теорема 3.7 є одним з головних результатів теорії квадратичної оптимізації лінійних систем на базі рівняння Ріккаті (див., наприклад, [151]). У підрозд. 3.4 наведено алгоритм квадратичної оптимізації за виходом з урахуванням локалізації спектра замкненої системи (див. [46, 49]). Доведення теорем 3.10 і 3.11 є в [152].

Розділ 4. Умови стабілізовності стану рівноваги класу нелінійних систем (4.10) (теорема 4.1) сформульовано в [64]. Результати про застосування методу квадратичних функцій Ляпунова в задачах робастної стабілізації та оптимізації станів рівноваги класу нелінійних систем (4.5) (теореми 4.2, 4.3 та їхні наслідки) опубліковано в [59, 70, 137]. Ці результати використано під час розв'язання аналогічних задач для класу нелінійних систем керування, поданих у формі Лагранжа (4.35) [71].

Розділ 5. Задачу оптимального H_∞-керування вперше сформульовано у праці [153]. З оглядом відомих результатів у цьому напрямі можна ознайомитися в [17, 100, 106, 147, 155]. Оцінювання впливу обмежених збурень у системах керування можна проводити мінімізацією інваріантних множин векторів стану або виходу [40, 85]. У підрозд. 5.1 і 5.2 викладено основні результати узагальненої теорії H_∞-керування [60, 62, 64, 75, 77, 137] з використанням зваженого критерію якості систем [60]. Результати підрозд. 5.2 сформульовано у вигляді узагальнень відповідних тверджень із [13]. Оцінки зважених критеріїв якості та методи їх досягнення в дескрипторних системах керування (підрозд. 5.3) отримано в [65, 67–69, 72–74, 136]. Леми 5.3—5.6 та їхні наслідки встановлено в [65]. Ідею використання параметризації розв'язків матричних нерівностей у вигляді (5.90) і (5.91) запозичено з [142]. Особливої уваги варті дослідження проблеми H_∞-керування для нелінійних і, зокрема, афінних та псевдолінійних систем (підрозд. 5.4). Вирішення цієї проблеми може бути локальним з використанням узагальнених критеріїв якості типу (5.4) (див., наприклад, [128, 139, 149]).

Розділ 6. Методи робастної стабілізації та оптимізації за виходом дискретних систем керування, викладені у підрозд. 6.1—6.3, опубліковано в [61, 138]. Результати, що стосуються теорії H_∞-керування (підрозд. 6.4, 6.5), є дискретними аналогами відповідних тверджень розд. 5 [63, 66, 76] (див. також [14, 17]).

Розділ 7. Основні означення та допоміжні факти теорії динамічних систем у напівупорядкованому просторі запозичені з праць [23, 26, 35, 36, 120]. Узагальнену класифікацію динамічних систем у просторі з конусом та умови належності систем виділеним класам наведено в [54, 132, 134, 135]. Умови експоненціальної стійкості лінійних позитивних систем вивчено в [50, 51] (див. також [83]). Властивості позадіагонально невід'ємних матриць встановлено в [111]. Теорему 7.2 отримано в [5], а лему 7.7 та теорему 7.3 — в [53]. Дискретні аналоги тверджень про стійкість позитивних систем наведено в [134, 135]. Умови позитивності та абсолютної стійкості систем із запізненням запропоновані в [54]. Теорему 7.6 сформульовано в [60]. Метод побудови інваріантних множин динамічних систем в термінах конусних нерівностей і узагальнений принцип порівняння, що випливає з нього, запропоновані в [6,132]. Змінні конуси в задачах порівняння запропоновано в [52]. Результати підрозд. 7.6 отримано в [52, 132, 134, 135].

Розділ 8. Основні означення та факти теорії матриць взяті з праць [21,92]. Лемму 8.1 сформульовано в [131], її доведення є [60]. Твердження леми 8.3 відоме при $\gamma = 1$ [13, 106], загальніше твердження (лема 8.4) отримано в [74]). Доведення критеріїв сумісності ЛМН (8.15) є в [12, 112, 123], критерій сумісності квадратичної нерівності (8.16) отримано в [67]. Означення векторних, матричних та операторних норм взято з [20, 23, 92]. Приклади типових конусів у скінченновимірних просторах наведені в [5, 23, 145].

Список літератури

[1] Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А., Земляков А. С., Козлов Р. И., Маликов А. И., Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости; под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова М.: Наука, 1987. 312 с.

[2] Александров А. Ю., Платонов А. В. Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. 263 с.

[3] Алиев Ф. А., Ларин В. Б. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор). *Прикладная механика.* 2011. Т. 47, № 3. С. 3–49.

[4] Алілуйко А. М., Мазко О. Г. Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2006. Т. 3, № 1. С. 7–24.

[5] Алілуйко А. М., Мазко О. Г. Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем. *Укр. мат. журн.* 2006. Т. 58, № 11. С. 1446—1461.

[6] Алілуйко А. М., Мазко О. Г. Інваріантні множини та порівняння динамічних систем. *Нелінійні коливання.* 2007. Т. 10, № 2. С. 163–176.

[7] Алілуйко А. М., Мазко О. Г. Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2005. Т. 2, № 1. С. 28–45.

[8] Алілуйко А. М. Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку. *Динамические системы.* 2007. Т. 22. С. 96–108.

[9] Андреев Ю. Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. *Автоматика и телемеханика.* 1977. № 3. С. 5–50.

[10] Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.

[11] Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.

[12] Баландин Д. В., Коган М. М. Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. Нижний Новгород: ННГУ, 2010. 93 с.

[13] Баландин Д. В., Коган М. М. Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями. *Автоматика и телемеханика.* 2010. № 6. С. 20–38.

[14] Баландин Д. В., Коган М. М., Кривдина Л. Н., Федюков А. А. Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах. *Автоматика и телемеханика.* 2014. № 1. С. 3–22.

[15] Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

[16] Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. *ДАН СССР.* 1952. Т. 86, № 3. С. 435–456.

[17] Белов А. А., Курдюков А. П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015. 272 с.

[18] Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.

[19] Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функций Ляпунова. Київ: Наукова думка, 1981. 412 с.

[20] *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

[21] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

[22] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

[23] Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 478 с.

[24] Голубев А. Е., Крищенко А. П., Ткачев С. Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор). *Автоматика и телемеханика.* 2005. № 7. С. 3–42.

[25] Губарев В. Ф. Моделювання та ідентифікація складних систем. Київ: Наукова думка, 2019. 248 с.

[26] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

[27] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

[28] Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 304 с.

[29] Зуев А. Л., Игнатьев А. О., Ковалев А. М. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Київ: Наукова думка, 2013. 431 с.

[30] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.

[31] Кириченко Н. Ф. Введение в теорию стабилизации движения. Київ: Вища школа, 1978. 184 с.

[32] Кореневский Д. Г. Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (Алгебраические критерии). Київ: Наукова думка, 1992. 148 с.

[33] Кореневский Д. Г., Мазко А. Г. Компактная форма алгебраического критерия абсолютной (по запаздыванию) устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений. *Укр. мат. журн.* 1989. Т. 41, № 2. С. 278–282.

[34] Кошляков В. Н., Макаров В. Л. Структурный анализ некоторого класа динамических систем. *Укр. мат. журн.* 2000. Т. 52, № 8. С. 1089–1096.

[35] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 233 с.

[36] Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. 256 с.

[37] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.

[38] Кублановская В. Н. К спектральной задаче дดя полиномиальных пучков матриц. *Записки научных семинаров ЛОМИ.* 1978. Т. 80. С. 83—97.

[39] Кунцевич В. М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Київ: Наукова думка, 2006. 264 с.

[40] Кунцевич В. М. Оценки воздействия ограниченных возмущений на нелинейные дискретные системы и их минимизация. *Автоматика и телемеханика.* 2019. № 9. С. 25–44.

[41] Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А. Устойчивость движения: метод сравнения. Київ: Наукова думка, 1991. 248 с.

[42] Леонов Г. А., Шумафов М. М. Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 308 с.

[43] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

[44] Луковський І. О., Тимоха О. М., Солодун О. В. Математичні проблеми нелінійної динаміки конічних резервуарів з рідиною. Київ: Наукова думка, 2019. 224 с.

[45] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1980. 472 с.

[46] Мазко А. Г. Матричный алгоритм синтеза оптимальных линейных систем с заданными спектральными свойствами . *Автоматика и телемеханика.* 1981. № 5. С. 33–41.

[47] Мазко А.Г. Отщепление и локализация спектра матричного полинома. *Доклады НАН Украины.* 1994. Т. 10. С. 15–19.

[48] Мазко А. Г. Локализация спектра и представление решений линейных динамических систем. *Укр. мат. журн.* 1998. Т. 50, № 10. С. 1341–1351.

[49] Мазко А. Г. Локализация спектра и устойчивость динамических систем. Праці Ін-ту математики НАН України. 1999. Т. 28. 216 с.

[50] Мазко А. Г. Устойчивость линейных позитивных систем. *Укр. мат. журн.* 2001. Т. 53, № 3. С. 323–330.

[51] Мазко А. Г. Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве. *Укр. мат. журн.* 2004. Т. 56, № 4. С. 462–475.

[52] Мазко А. Г. Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса. *Укр. мат. журн.* 2005. Т. 57, № 2. С. 198–213.

[53] Мазко А. Г. Производные по конусу и конусные неравенства в задачах устойчивости. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2007. Т. 4, № 2. С. 165–180.

[54] Мазко А. Г. Конусные неравенства и устойчивость дифференциальных систем. *Укр. мат. журн.* 2008. Т. 60, № 8. С. 1058–1074.

[55] Мазко А. Г. Локализация собственных значений регулярных матричных функций. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2009. Т. 6, № 3. С. 130–148.

[56] Мазко А. Г. Локализация собственных значений полиномиальных матриц. *Укр. мат. журн.* 2010. Т. 62, № 8. С. 1063–1077.

[57] Мазко А. Г. Робастная устойчивость и оценка качества семейства нелинейных систем управления. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2011. Т. 8, № 2. С. 174–186.

[58] Мазко А. Г. Критерии устойчивости и локализация спектра матрицы в терминах функций следа. *Укр. мат. журн.* 2014. Т. 66, № 10. С. 1379–1386.

[59] Мазко А. Г. Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления. *Автоматика и телемеханика.* 2015. № 2. С. 73–88.

[60] Мазко А. Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств. Праці Інституту математики НАНУ, 2016. Т. 102. 332 с.

[61] Мазко А. Г., Богданович Л. В. Робастная стабилизация и оценка функционала качества нелинейных дискретных систем управления. *Проблемы управления и информатики.* 2013. № 3. С. 92–101.

[62] Мазко А. Г., Кусий С. Н. Робастная стабилизация и оценка взвешенного подавления возмущений в системах управления. *Проблемы управления и информатики.* 2016. № 6. С. 71–82.

[63] Мазко А. Г., Кусий С. Н. Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления. *Проблемы управления и информатики.* 2017. № 6. С. 78–93.

[64] Мазко А. Г., Кусий С. Н. Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления. *Нелінійні коливання.* 2015. Т. 18, № 3. С. 373–387.

[65] Мазко О. Г. Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 11. С. 1541–1552.

[66] Мазко О. Г. Зважена оцінка гасіння обмежених збурень у дескрипторних дискретних системах керування. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2019. Т. 16, № 2. С. 85–100.

[67] Мазко О. Г. Зважена оцінка і пониження рівня впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування. *Укр. мат. журн.* 2020. Т. 72, № 11. С. 1510–1523.

[68] Мазко О. Г. Зважене гасіння зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах керування. *Укр. мат. журн.* 2021. Т. 73, № 10. С. 1377–1390.

[69] Мазко О. Г. Оцінка та досягнення зважених критеріїв якості у дескрипторних системах керування. *Укр. мат. журн.* 2022. Т. 74, № 7. С. 980–990.

[70] Мазко О. Г., Богданович Л. В. Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2012. Т. 9, № 1. С. 213–230.

[71] Мазко О. Г., Богданович Л. В. Стабілізація механічних систем з невизначеними параметрами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2013. Т. 10, № 3. С. 123–144.

[72] Мазко О. Г., Котов Т. О. Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2018. Т. 15, № 1. С. 65–87.

[73] Мазко О. Г., Котов Т. О. Оцінка впливу і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2019. Т. 16, № 2. С. 63–84.

[74] Мазко О. Г., Котов Т. О. Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування. *Укр. мат. журн.* 2019. Т. 71, № 10. С. 1374–1388.

[75] Мазко О. Г., Кусій С. М. Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, № 3. С. 129–145.

[76] Мазко О. Г., Кусій С. М. Динамічні регулятори у дискретних системах з керованими і спостережуваними виходами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2017. Т. 14, № 2. С. 88–109.

[77] Мазко О. Г., Кусій С.М. Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2018. Т. 15, № 1. С. 88–99.

[78] Мазко О. Г., Шрам В. В. Умови стійкості та локалізації спектра сім'ї лінійних динамічних систем . *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2009. Т. 6, № 3. С. 149–168.

[79] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

[80] Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости автономных систем Важевского. *Диф. уравнения.* 1980. Т. 16, № 8. С. 1392–1407.

[81] Массера Х. Л. К теории устойчивости. *Математика.* 1957. Т. 1, № 4. С. 81–104.

[82] Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.

[83] Мильштейн Г. Н. Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве. *Известия вузов. Математика.* 1975. Т. 9. С. 35–42.

[84] Оболенский А. Ю. Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем. Київ: Фенікс, 2010. 228 с.

[85] Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014. 560 с.

[86] Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

[87] Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению. *Автоматика и телемеханика.* 2005. № 5. С. 7–46.

[88] Постников Н. С., Сабаев Е. Ф. Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика.* 1980. № 4. С. 24–34.

[89] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Київ: Вища школа, 1987. 288 с.

[90] Слюсарчук В. Ю. Диференціальні рівняння в банаховому просторі. Рівне: Вид-во НУВГП, 2006. 314 с.

[91] Хлебников М. В., Щербаков П. С. Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения. *Автоматика и телемеханика.* 2008. № 11. С. 125–139.

[92] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

[93] Хусаинов Д., Диблик Й., Ружичкова М. Линейные динамические системы с последействием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация. Киев: ГП Информ.-аналит. агенство, 2015. 252 с.

[94] Хусаинов Д.Я., Шатирко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Изд-во Киевского ун-та, 1997. 236 с.

[95] Чайковский М.М., Курдюков А.П., Тимин В.Н. Построение H_∞-субоптимального регулятора для управления самолетом на режиме посадки с помощью пакета LMI Control Toolbox. Труды II Всероссийской научной конференции “Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB”. М.: ИПУ РАН, 2004. С. 1191–1206.

[96] Ackermann J. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. Berlin: Springer Verlag, 1993. xvi+406 p.

[97] Anderson B. D. O., Moore J. B. Linear optimal control. New York: Prentice-Hall, 1971. 413 p.

[98] Araujo J.M., Barros P.R., Dorea C.E.T. Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* 2012. Vol. 20, N 4. P. 1041–1047.

[99] Athans M., Levine W. S. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1970. Vol. AC-15, N 1. P. 44–50.

[100] Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia: PA, 1994, Vol. 15. 193 p.

[101] Bender D. J., Laub A. J. The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1987. AC-32, N 8. P. 672–688.

[102] Yong-Yan Cao, James Lam, You-Xiam Sun. Static output feedback stabilization: An LMI approach. *Automatica*. 1998. Vol. 34, N 12. P. 1641–1645.

[103] Carlson D., Hill R. D. Controllability and inertia theory for functions of a matrix. *J. Math. Anal. Appl*. 1977. Vol. 59. P. 260–266.

[104] Cobb D. Robust Controllability, observability and duality in singular systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1984. Vol. 29. P. 1076 – 1082.

[105] Guang-Ren Duan. Analysis and Design of Descriptor Linear Systems. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. 494 p.

[106] Dullerud G., Paganini F. A course in robust control theory. A convex approach. New York: Springer, 2000. xx+419 p.

[107] El-Ghaoui L., Gahinet P. Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems. *Proc. Eur. Control Conf*. Groningen, The Netherlands, 1993. P. 1176–1179.

[108] Elsner L. Monotonie und randspektrum bei vollstetigen operatoren. *Arch. Rational Mech. Anal*. 1970. Vol. 36. P. 356–365.

[109] Farina L., Rinaldi S. Positive linear systems. Theory and applications. New York: John Wiley & Sons Inc., 2000. x+305 p.

[110] Yu Feng, Mohamed Yagoubi. Robust Control of Linear Descriptor Systems. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2017. XI+142 p.

[111] Fiedler M., Pták V. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czech. Math. J.* 1962. Vol. 12. P. 382–400.

[112] Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*. 1994. Vol. 4. P. 421–448.

[113] Ghorbel F., Hung J. Y., Spong M. W. Adaptive control of flexible-joint manipulators. *IEEE Control Systems Mag.* 1989. N 9. P. 9—13.

[114] Godunov S. K. Ordinary differential equations with constant coefficient. Translations of Mathematical Monographs. Providence: American Mathematical Society, 1997, Vol. 169. ix+282 p.

[115] Haddad W. M., Chellaboina V. Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay. *Systems & Control Letters*. 2004. Vol. 51. P. 355–361.

[116] Hale J. K., Lunel S. M. V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. 447 p.

[117] Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D. Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions. *Automatica*. 2003. Vol. 39, N 8. P. 1479–1485.

[118] Henrion D., Bachelier O., Sebek M. $\mathcal{D}$-stability of polynomial matrices. *Intern. J. Control*. 2001. Vol. 74, N 8. P. 355–361.

[119] Hill R. D. Inertia theory for simultaneously triangulable complex matrices. *Linear Algebra* & *Appl*. 1969. Vol. 2. P. 131–142.

[120] Hirsch M. W., Smith H. L. Competitive and cooperative systems: mini-review. *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* 2003. Vol. 294. P. 183–190.

[121] Hsiung K.-L. Lyapunov inequality and bounded real lemma for discrete-time descriptor systems. *Proc. of the 37th IEEE conf. on decision and control*, Florida, USA, 1998. P. 289 – 290.

[122] Ishihara J.Y., Terra M.H. On the Lyapunov theorem for singular systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 2002. Vol. 47, N 11. P. 1926 – 1930.

[123] Iwasaki T., Skelton R. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*. 1994. Vol. 30, N 8. P. 1307 – 1317.

[124] Iwasaki T., Sketlon R. Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions. *J. Optim. Theory Appl*. 1995. Vol. 77. P. 291–307.

[125] Kalauch A. On positive-off-diagonal operators on ordered normed spaces. *J. of Analysis and its Appl*. 2003. Vol. 22. P. 229–238.

[126] Kučera V., De Souza C. E. A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability. *Automatica*. 1995. Vol. 31, N 9. P. 1357–1359.

[127] Liao X., Wang L., Yu P. Stability of dynamical systems. Amsterdam: Elsevier, 2007. 706 p.

[128] Wei-Min Lu and Doyle J. C. H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1995. AC-40, N 9. P. 1668–1675.

[129] Martynyuk A. A. Stability theory for dynamic equations on time scales. Cham: Springer Intern. Publish. Switzerland, 2016. 223 p.

[130] Masubushi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N. H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach. *Automatica*. 1997. Vol. 33, N 4. P. 669 – 673.

[131] Mazko A. G. Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems / Stability, Oscillations and Optimization of Systems. Cambridge: Cambridge Sci. Publish. Ltd, 2008, Vol. 2. xx+270 p.

[132] Mazko A. G. Comparison and ordering problems for dynamic systems set. *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*. 2010. Vol. 16, N 1(33). P. 1–8.

[133] Mazko A. G. Spectrum localization of regular matrix polynomials and functions. *Electronic J. of Linear Algebra (ELA)*. 2010. Vol. 20. P. 333–350.

[134] Mazko A. G. Cone inequalities and stability of dynamical systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2011. Vol. 11, N 3. P. 303–318.

[135] Mazko A. G. Positivity, robust stability and comparison of dynamic systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. DCDS Supplements*. Vol. 2011. P. 1042–1051.

[136] Mazko A. G. Weighted performance measure and generalized H_∞ control problem for linear descriptor systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2022. Vol. 22, N 3. P. 303–318.

[137] Mazko A. G. Robust output feedback stabilization and optimization of control systems. In: Advances in Stability and Control Theory for Uncertain Dynamical Systems (Eds.: C. Cruz-Hernández, A. A. Martynyuk, A. G. Mazko). Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2021. P. 37–62.

[138] Mazko A. G. Robust output feedback stabilization and optimization of discrete-time control systems. In: Advances in Stability and Control Theory for Uncertain Dynamical Systems (Eds.: C. Cruz-Hernández, A. A. Martynyuk, A. G. Mazko). Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2021. P. 113–135.

[139] Najmurrokhman A. On solvability of output feedback nonlinear H_∞-control problem using nonlinear matrix inequalities approach. *J. of Electrical Engin. and Inform. Technology*. 2003. Vol. 1, N 1. P. 33–39.

[140] Ostrowsky O., Schneider H. Some theorems on the inertia of general matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 1962. Vol. 4. P. 72–84.

[141] Petersen I. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Syst. Control Lett.* 1987. Vol. 8, N 4. P. 351–357.

[142] Rehm A., Allgöwer F. General quadratic performance analysis and synthesis of differential algebraic equation (DAE) systems. *Journal of Process Control.* 2002. Vol. 12. P. 467–474.

[143] Scherer C. The Riccati inequality and state-space H_∞–optimal control / Ph. D. Dissertation. Universitat Wurzburg, Germany, 1990. 267 p.

[144] Simon I. D., Mitter S. K. A theory of modal control. *Inf.* & *Control.* 1968. Vol. 13. P. 316–353.

[145] Stern R. J., Wolkowicz H. Invariant ellipsoidal cones. *Linear Algebra* & *Appl.* 1991. Vol. 150. P. 81–106.

[146] Stern R. J., Wolkowicz H. Exponential nonnegativity on the ice cream cone. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1991. Vol. 12, N 1. P. 160–165.

[147] Stoorvogel A. A. The H_∞ control problem: A state space approach. New York: Prentice-Hall, 1992. 468 p.

[148] Vandergraft J. S. Spectral properties of matrices which have invariant cones. *SIAM. J. Appl. Math.* 1968. Vol. 16. P. 1208–1222.

[149] Xin Wang, Yaz E. E., Schneider S. C., Yaz Y. I.. H_2–H_∞ control of continuous-time nonlinear systems using the state-dependent Riccati equation approach. *Systems Science & Control Engineering.* 2017. Vol. 5. P. 224–231.

[150] Willems J. C., Polderman J. W. Introduction to mathematical systems theory. A behavioral approach. New York: Springer-Verlag, 1998. xxx+424 p.

[151] Wonham W. M. Linear multivariable control: A geometric approach. New York: Springer-Verlag, 1979. xv+326 p.

[152] Xu S., Lam J. Robust Control and Filtering of Singular Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[153] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Autom. Control.* 1981. Vol. 26, N 2. P. 301–320.

[154] Zhang G., Xia Y., Shi P. New bounded real lemma for discrete-time singular systems. *Automatica.* 2008. Vol. 44. P. 886–890.

[155] Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. Englewood: Prentice-Hall, Inc., 1996. 586 p.

Предметний покажчик

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
INSTITUTE OF MATHEMATICS

A. G. Mazko

MATRIX METHODS FOR THE ANALYSIS AND SYNTHESIS OF DYNAMICAL SYSTEMS

The book outlines constructive methods for the analysis and synthesis of dynamical systems based on the application of matrix equations and inequalities. The generalizations of the Lyapunov equation are presented in the framework of stability and spectrum localization theory of linear systems. Classical methods for motion stability analysis, modern methods for robust stabilization and optimization of dynamical systems, as well as new approaches to solving generalized H_∞-control problems for continuous and discrete time systems with controllable and observable outputs are presented. Algorithms for estimating and minimizing the weighted damping level of bounded perturbations in standard and descriptor control systems are proposed. The stability theory of positive and monotone dynamical systems is developed.

The book is intended for scientists, engineers, PhD students and senior students of the corresponding specialties.

Н а у к о в е   в и д а н н я

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАЗКО Олексій Григорович

МАТРИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2023

Художній редактор І.П. Савицька
Технічний редактор Т.С. Березяк

Підп. до друку 11.10.2023. Формат 60x90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Computer Modern. Друк офс. Ум. друк. арк. 20,0.
Обл.-вид. арк. 16,0. Тираж 50 прим. Зам. № ДФ-1268

Оригінал-макет виготовлено
у НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво “Фенікс”»
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13 б
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 271 від 07.12.2000 р.